Untersuchungen zur Entwicklung und Förderung des Verhältnisdenkens bei Kindern

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Erziehungswissenschaften
an der Pädagogischen Hochschule Ruhr in Dortmund

vorgelegt von

Jürgen Floer, Berlin

Drucklegung: Juli 1977

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538104_0024

Untersuchungen zur Entwicklung und Förderung des Verhältnisdenkens bei Kindern

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Erziehungswissenschaften
an der Pädagogischen Hochschule Ruhr in Dortmund

vorgelegt von

Jürgen Floer, Berlin

Drucklegung: Juli 1977

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referenten: Prof. Dr. Heinrich Winter
Prof. Dr. Georg Schrage

Tag der mündlichen Prüfung: 7. Juli 1977

UNTERSUCHUNGEN ZUR ENTWICKLUNG UND FÖRDERUNG DES VERHÄLTNISDENKENS BEI KINDERN

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort		1
0	Einleitung	3
1	MATHEMATISCHE ANALYSE DER ZUGÄNGE ZUM BRUCHBEGRIFF UND DIDAKTISCHE FRAGEN	8
1.1	Zugänge zu den Bruchzahlen	8
1.1.1	Skizzierung der algebraisch-mengentheoretischen Standardkonstruktion	8
1.1.2	Bruchzahlen als Abbildungen (Operatormodell)	12
1.2	Historische Entwicklung des Bruchbegriffs	22
1.3	Natürlichkeit und Reichweite der Zugänge zum Bruch- und Verhältnisbegriff	32
1.3.1	Probleme eines "lernorientierten" Zugangs zu Brüchen und Verhältnissen	32
1.3.2	Die Komplexität des Bruchbegriffs und ihre didaktische Erfassung	37
1.3.3	Verhältnisvergleiche im Vorfeld des Operatordenkens	45
2	PSYCHOLOGISCHE ASPEKTE DER ENTWICKLUNG DES VERHÄLTNISDENKENS	52
2.1	Verhältnisdenken und kognitive Entwicklung	52
2.1.1	Mathematische Analyse und psychologische Aspekte	52
2.1.2	Begriffslernen: (Zu) einfache Modelle und ihre Grenzen	54
2.1.3	Verhältnisdenken und BRUNERs Theorie der Repräsentationsformen des Wissens	61
2.1.4	Verhältnisdenken und PIAGETs Theorie der kognitiven Entwicklung	65
2.1.4.1	Grundgedanken	65
2.1.4.2	Formale Operationen	69

2.2	Analyse vorliegender Ansätze und Ergebnisse	79
2.2.0	Vorbemerkungen	79
2.2.1	Verhältnisdenken und Fähigkeit zu symbolischer Repräsentation: Die Untersuchung von BRUNER/KENNEY	79
2.2.2	Verhältnisvergleiche in Wahrscheinlichkeitssituationen: Die Untersuchung von FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT	85
2.2.3	Überblick über weitere Untersuchungen	88
3	UNTERSUCHUNGEN ZUR ENTWICKLUNG DES VERHÄLTNISDENKENS	97
3.1	Verhältnisvergleiche von Kindern in verschiedenen Altersstufen (Untersuchung 1)	97
3.1.1	Ziele, Probleme und Durchführung des Versuchs	97
3.1.2	Ergebnisse	106
3.1.2.1	Allgemeine Befunde	106
3.1.2.2	Analyse der Einzelergebnisse	110
3.1.2.3	Versuche zur Neuordnung der Aufgaben	115
3.1.2.4	Zusammenfassung der Ergebnisse und Präzisierung der Fragestellungen für die weiteren Untersuchungen	119
3.2	Analyse der Schwierigkeiten auf dem Wege zum Verhältnisbegriff (Untersuchung 2)	120
3.2.1	Ziele und Anlage des Versuchs	120
3.2.2	Auszüge aus den Interviews	127
3.2.2.0	Vorbemerkungen	127
3.2.2.1	Interviews Kindergarten	128
3.2.2.2	Interviews Grundschule (Klasse 3)	129
3.2.2.3	Interviews Realschule (Klasse 6)	136
3.2.2.4	Stichworte zu den Ergebnissen der Interviews	142
3.2.3	Quantitative Auswertung der Ergebnisse	144
3.2.3.0	Vorbemerkungen	144
3.2.3.1	Ergebnisse des Teils 1	145
3.2.3.2	Interpretation der Ergebnisse (Teil 1)	149
3.2.3.3	Ausgewählte weitere Fragen (Teil 2/3)	153

4	UNTERSUCHUNGEN ZUR FÖRDERUNG DES VERHÄLTNISDENKENS DURCH UNTERRICHT	159
4.1	Probleme fachdidaktischer Unterrichtsforschung	159
4.1.1	Begriffsentwicklung und Unterricht	159
4.1.2	Möglichkeiten und Grenzen empirischer Unterrichtsforschung	164
4.2	Umgang mit Bruchoperatoren und Auswirkungen auf das Verhältnisdenken (Untersuchung 3)	168
4.2.1	Zur Planung des Versuchs	168
4.2.2	Ergebnisse	169
4.2.3	Folgerungen und Fragen	170
4.3	Förderung von Begriffsentwicklung durch gezielten Unterricht (Untersuchung 4)	172
4.3.1	Testkonstruktion und Versuchsplanung	172
4.3.1.1	Beschreibung des Tests	172
4.3.1.2	Zur Durchführung des Versuchs	175
4.3.1.3	Hypothesen	175
4.3.2	Beschreibung der Unterrichtsreihen	177
4.3.3	Ergebnisse	187
4.3.3.1	Zur Testanalyse	187
4.3.3.2	Ergebnisse des Vortests	188
4.3.3.3	Vergleich der Ergebnisse im Vor- und Nachtest	191
4.3.3.4	Zur Erfassung des Transfers	195
4.3.4	Diskussion der Ergebnisse	198
5	ZUSAMMENFASSENDE SCHLUßBEMERKUNGEN	200

LITERATUR

V O R W O R T

Die vorliegende Arbeit ist ein Versuch, die Bildung mathematischer Begriffe bei Kindern zwischen fünf und dreizehn Jahren zu verfolgen.

Ein solcher Versuch kann nicht mit den Mitteln der Einzelwissenschaften Mathematik, Psychologie oder Pädagogik allein unternommen werden, sondern verlangt die Verzahnung von mathematischer Analyse, psychologischer Theorie, experimenteller Arbeit und unterrichtspraktischen Bemühungen.

Jedes dieser Stichworte bezeichnet eine Quelle spezifischer Probleme, die an zahlreichen Stellen sichtbar werden. Es fehlen Vorbilder und ein theoretischer Rahmen für mathematikdidaktische Arbeiten dieser Art.
Man sucht vergeblich nach geeigneten Versuchsplänen und Meßinstrumenten (Tests). Endlich kommen sehr konkrete, oft banal erscheinende Schwierigkeiten hinzu, die die praktische Arbeit (zumal wenn diese im wesentlichen im "Ein-Mann-Betrieb" vor sich geht) ungemein erschweren.

Dies alles hat zur Folge, daß ein Mosaik von Bruchstükken entstanden ist, dessen Nahtstellen noch hier und da sichtbar sind, da die chronologische Abfolge der einzelnen Untersuchungen nicht mit der Reihenfolge der Darstellung übereinstimmt.[1] So kann es nicht verwundern, daß das Vorliegende den Leser (und den Verfasser erst recht) an vielen Stellen mit offenen Fragen oder gar Unbehagen zurückläßt.

---

1) Teilergebnisse findet man bereits in anderen Arbeiten des Verfassers (FLOER, 1974a, 1974b, 1975).

Insgesamt muß das Ziel bescheiden als Versuch formuliert werden, an einem kleinen Ausschnitt einige der kognitiven Prozesse aufzudecken, die sich im Verlaufe der kindlichen Entwicklung abspielen. Angesichts der vielfältigen Schwierigkeiten möchte ich umso herzlicher denen danken, die mitgeholfen haben, sie zu überwinden.

Zunächst gilt dieser Dank den beteiligten Kindern und ihren Lehrern, dann den Studentinnen und Studenten, die bei der Durchführung der Untersuchungen mitgearbeitet haben: Frau ZSCHIESCHE, Herr BIEDERBECK und Herr WOLFF bei den drei ersten Untersuchungen, Frl. BRANDAU, Frl. MEYER, Frl. LINDBERG, Herr BURGHAUS und Herr REINERT bei der Untersuchung 4.

Weiter danke ich verschiedenen Mitgliedern des Seminars für Mathematik und ihre Didaktik der Pädagogischen Hochschule Ruhr für klärende Gespräche, Herrn Professor Dr. S. AVITAL (Haifa) für sein hartnäckiges Drängen während seiner Aufenthalte in Dortmund wie aus der Ferne.

Nicht vergessen darf ich hier meine Mutter, die unermüdlich und verständnisvoll die Fertigstellung des Manuskripts ermöglicht hat.

Ganz besonders zu Dank verpflichtet bin ich Herrn Professor Dr. H. WINTER (Neuß), ohne dessen Geduld, Ermunterung und (fachliche und menschliche) Hilfe diese Arbeit wohl kaum zu Ende geführt worden wäre. Eine Fülle von Fußnoten würde notwendig sein, um auf diese Hilfen im einzelnen hinzuweisen, dabei bliebe vieles von dem noch unerwähnt, was ich vielen Gesprächen und langjähriger Zusammenarbeit mit ihm verdanke.

0 Einleitung

(1) Skizzierung des Ziels

Das Ziel der Arbeit ist es, erste Stufen in der Entwicklung des Bruch- bzw. Verhältnisbegriffs bei Kindern aufzudecken. Dazu sind einige Erläuterungen notwendig. Es geht nicht darum herauszufinden, wie Kinder formale Fertigkeiten im Umgang mit Bruchzahlen erwerben. Diese Frage haben wir aus zwei Gründen ausgeschlossen. Zum einen könnte es sein (und es gibt zahlreiche Beispiele dafür), daß Kinder mit Symbolen umgehen, ohne die zugrundeliegenden Begriffe gebildet zu haben. Zum anderen ist die Fähigkeit zu begründeten Verhältnisvergleichen fundamentaler als Bruchrechenfertigkeit und wird in zahlreichen Varianten gebraucht.

Am Ende der Entwicklung stehen natürlich Bruchzahlen, die dann ein überaus leistungsfähiges Instrument in einer Vielzahl von Situationen darstellen (bei Wahrscheinlichkeitsüberlegungen, in der Physik, bei der Beschreibung von Abbildungen, Mischungsproblemen u.v.a.m.). Es sind sehr verschiedene Gesichter, mit denen sie sich zeigen: Sie treten als Verhältniszahlen, als Namen von Größen, Proportionalitäten zwischen Größenbereichen, Lösungen von Gleichungen oder "nur" als Rechenobjekte, mit denen es geschickt umzugehen gilt, auf. Zweifellos sind alle diese Aspekte außerordentlich wichtig. Doch wenn wir die Genese der Bruchzahlen verfolgen wollen, müssen wir unsere Versuche in einem sehr frühen Punkt dieser Entwicklung ansetzen, an einer Stelle, an der die verschiedenen Ausprägungen und Entfaltungen noch nicht stattgefunden haben. In diesem Stadium geht es noch nicht um syntaktische Handhabe von Zeichen der Form $\frac{p}{q}$, sondern um die Gewinnung von "Verständnis", und

das heißt: um den Aufbau von Modellen. Ein mögliches Modell wäre die konkrete Bruchrechnung, andere werden wir in Kap. 1 beschreiben.

Wir haben für unsere Tests Fragestellungen gewählt, in denen Größen-, insbesondere Zahlenpaare, nach ihrem "Verhältnis" zu vergleichen sind. Auf welchem Wege dieser Vergleich stattfindet, ist dabei zunächst bewußt offen gelassen. Diese Fähigkeit ist zentral für jeden weiteren Fortschritt, unabhängig davon, ob bei der später stattfindenden Begriffsentfaltung Anteilvergleiche (damit Operatoren) oder Verhältnisüberlegungen in den Mittelpunkt gerückt werden. Es sind daher durchaus Vorerfahrungen zum Bruchbegriff, der dann später über viele Stufen weiter ausgebaut wird, die von einfachen Verhältnisvergleichen bis zur Theorie linearer Funktionen, von der noch naiven Verwendung von Bruchschreibweisen bis zur Konstruktion eines neuen Zahlenbereichs reichen. Erst im Verlaufe dieser Entwicklung findet die Auffächerung der Aspekte statt, die im frühen Stadium gleichsam im Keim angelegt sind. Dies erklärt, warum wir im folgenden neutraler von "Verhältnisdenken" sprechen und uns so nicht auf die Alternative Bruch- oder Verhältnisbegriff festlegen.

(2) Erläuterungen zum Vorgehen

Aus dem genannten Ziel ergeben sich einige Konsequenzen für das Vorgehen. Wir werden versuchen, eine Synthese lernpsychologischer und mathematischer Aspekte zu finden. Leider gibt es noch kaum Vorbilder für diesen Versuch. In allzu vielen Arbeiten zu Problemen des Mathematikunterrichts findet man entweder mathematische Analysen, allenfalls umrahmt von psychologischen Anmerkungen, oder aber psychologische Untersuchungen, die sich nur schwer in einen fachdidaktischen Rahmen einordnen

lassen. Brücken sind dringend notwendig, und die Anzeichen sind unübersehbar, daß ein Großteil der didaktischen Arbeit darin bestehen wird, sie zu bauen. (Vgl. WITTMANN, 1974.)

Am Anfang der Überlegungen zu dieser Arbeit stand die naive Hoffnung, daß es ausreichen würde, von mathematischen Analysen ausgehend, zu jedem der darin aufgezeigten Konstruktionsschritte ein psychologisches Korrelat anzugeben und seine Entstehung zu verfolgen. Von dieser einfachen Grundposition kommt man jedoch schnell ab. Die Wege, auf denen mathematische Objekte und Sätze gewonnen werden, verlaufen nicht schlicht parallel zu denen, die zu kindlicher Einsicht führen. Zu diesen beiden Wegen gehören zwei didaktische Grundpositionen. Bei der einen steht die Mathematik im Mittelpunkt, das Kind wird den mathematischen Bahnen entlanggeführt. Die andere geht zunächst dem kindlichen Denken nach, greift es auf, erweitert es und führt es zu mathematischen Begriffen.

Für die letzte Alternative haben wir uns in der vorliegenden Arbeit entschieden, auch wenn sich daraus eine Reihe von Schwierigkeiten ergeben. Sie ist ein didaktischer Versuch, kein mathematischer, psychologischer oder erkenntnistheoretischer. Vor alledem kommt etwas ins Spiel, hinzu treten noch spezifische Probleme von experimentellen Ansätzen und unterrichtspraktischen Versuchen. Das Vorgehen ist zwar nicht so einfach wie das nach der Schrittfolge "mathematische Analyse - Elementarisierung - Umsetzung in den Unterricht", aber didaktischen Fragen angemessener.

(3) Stichworte zum Aufbau

Wir geben in einer kurzen Übersicht an, welche Fragen wir im einzelnen stellen wollen und zu beantworten hoffen.

Kap. 1 enthält mathematische Aspekte, die für das Weitere von Bedeutung sind. Die mathematischen Stichworte sind nicht losgelöst von didaktischen Fragen, sondern von Anfang an werden die Probleme der Natürlichkeit und Reichweite der Instrumente mitdiskutiert. Unter diesem Gesichtspunkt ist es auch kein Zufall, daß die Anmerkungen zur historischen Entwicklung sich zu einem eigenen Abschnitt entwickelt haben. Gerade hier zeigen sich Schwierigkeiten und Möglichkeiten auch für das individuelle Lernen.

In Kap. 2 wird versucht, einen psychologischen Rahmen für Begriffsbildungsprozesse abzustecken. Auch hier wird die Diskrepanz zwischen klassischen psychologischen Theorien und didaktischen Überlegungen sichtbar. In dieses Bild paßt auch die in 2.2 bei der Analyse vorliegender Untersuchungen zur Entwicklung des Verhältnisdenkens zu Tage tretende Erkenntnis, daß der aus diesen Arbeiten zu gewinnende Ertrag enttäuschend gering ist. Dennoch ergeben sich aus dieser Analyse wichtige Hinweise für Fragestellungen und Verfahren, auf die wir in den folgenden Untersuchungen zurückgreifen werden.

In Kap. 3 werden zwei eigene Untersuchungen geschildert, die zunächst einmal nur eine Bestandsaufnahme der Fortschritte und Schwierigkeiten bei Verhältnisüberlegungen in verschiedenen Altersstufen liefern sollen.
Das ist keineswegs abwertend zu verstehen. Es besteht in der Didaktik wohl häufig die Gefahr, vieles anders und besser machen zu wollen, ohne zu sehen, wie wenig man über die Fragen überhaupt weiß. Theoriebildung ist

eine Sache, herauszufinden, wie Kinder denken, eine andere, nicht weniger wichtige. Insbesondere die Interviews (in 3.2) sollen uns dabei weiterhelfen.

Ausgehend von den erhaltenen Ergebnissen, haben wir zwei weitere Untersuchungen durchgeführt, bei denen die Frage nach der Förderung von Begriffsbildungen durch Unterrichtsmaßnahmen im Mittelpunkt stand (Kap. 4). Der erste dieser Versuche (Untersuchung 3) lieferte das überraschende und zunächst enttäuschende Ergebnis, daß eine mehrwöchige Unterrichtseinheit "Bruchrechnung" keine nennenswerten Veränderungen in den durch unsere Tests erfaßten Fähigkeiten zum Verhältnisvergleich bewirkte. Dieser Befund war dann Anstoß und Ausgangspunkt für die abschließende Untersuchung 4, in der wir die Frage nach den Möglichkeiten, kognitive Entwicklung durch Unterricht zu beeinflussen, sehr viel gezielter (damit notwendigerweise auch enger) gestellt haben.

Kap. 5 enthält eine Analyse der Ergebnisse und Hinweise auf didaktische Folgerungen.

Didaktische Anmerkungen und methodologische Fragen finden sich an mehreren Stellen der Arbeit. Dies hat seinen Grund nicht nur in deren Entstehungsgeschichte, sondern vor allem in der Hoffnung, daß dadurch die Probleme deutlicher werden, als wenn wir sie kompakt und isoliert in eigenen Kapiteln sammeln würden.

1. MATHEMATISCHE ANALYSE DER ZUGÄNGE ZUM BRUCHBEGRIFF UND DIDAKTISCHE FRAGEN

1.1 Zugänge zu den Bruchzahlen

1.1.1 Skizzierung der algebraisch-mengentheoretischen Standardkonstruktion

(1) Das in der Mathematik übliche Verfahren, aus dem Zahlbereich $\mathbb{N}$ neue umfassende Gebilde zu konstruieren, braucht hier nicht ausführlich dargestellt zu werden. Es wird (als Erweiterung der natürlichen Zahlen zu den ganzen einerseits, zu den Bruchzahlen andererseits) an zahlreichen Stellen beschrieben.[1] Als Hintergrund für unsere weiteren Überlegungen halten wir jedoch die wesentlichen Schritte fest: In $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ wird eine geeignete Äquivalenzrelation definiert. Für die so geschaffenen Zahlenpaarklassen definiert man Verknüpfungen und Ordnung (wobei nur die Repräsentantenunabhängigkeit sichergestellt werden muß). Endlich wird das Ausgangsgebilde in die Neuschöpfung dadurch "eingebettet", daß man es mit einer Teilmenge des konstruierten Gebildes durch Angabe eines Isomorphismus identifiziert. Auf diese Weise gelangt man im einfachsten Fall von den kommutativen regulären Halbgruppen $(\mathbb{N},+)$ bzw. $(\mathbb{N},\cdot)$ zu den Gruppen $(\mathbb{Z},+)$ bzw. $(\mathbb{B},\cdot)$, später von dem Integritätsbereich $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ zum Quotientenkörper $(\mathbb{Q},+,\cdot)$. Unter Berücksichtigung der Ordnungsstruktur handelt es sich jeweils um die entsprechenden angeordneten Gebilde.

Beschränken wir uns auf die Gewinnung der Bruchzahlen, so können wir das Ziel der Bemühungen kurz zusammen-

---

1) Vgl. etwa LANDAU (1930), BEHNKE/BACHMANN/FLADT/SÜSS (1962), OBERSCHELP (1968), LUGOWSKI/WEINERT (1968).

fassen: Es geht um die Erweiterung des angeordneten Halbrings $(\mathbb{N},+,\cdot,<)$ zum angeordneten Halbkörper $(\mathbb{B},+,\cdot,<)$.

(2) Der Standardzugang ist zwar mathematisch befriedigend - er liefert die gewünschten Objekte samt einer leistungsfähigen Struktur "mit einem Schlage" -, doch gehört die Konstruktion in einen rein mathematischen (mengentheoretisch-algebraischen) Verständnishorizont, über den Schüler nicht verfügen. Wohl kann man mit einiger Mühe Motivationen für Teile des Vorgehens finden (etwa für die Paarbildung aus der Tatsache, daß sich natürliche Zahlen auf beliebig viele Arten als Quotienten schreiben lassen), voll verständlich aber wird die Konstruktion nur vom Ziel her. In der Tat wird sie auch erst zum Gegenstand der Reflexion, nachdem man mit den zu schaffenden Objekten schon umgehen kann(sowohl in der Geschichte der Mathematik wie in der Lerngeschichte des einzelnen Menschen).

Von einem naiven Standpunkt aus - und ein solcher kann bei didaktischen Anstrengungen durchaus nützlich sein - stößt man auf eine Vielzahl von Fragen und Problemen:

- Warum stellt man Zahlen nebeneinander? Und wieso sind gerade die Paare "äquivalent", bei denen das Produkt der äußeren gleich dem der inneren Zahlen ist?
- Daß man im weiteren die durch diese Relation erzeugten Klassen als neue Objekte in den Mittelpunkt rückt, bedeutet einen weiteren Abstraktionsprozeß, der dem Lernenden erhebliche Mühe macht.
- Noch problematischer wird es bei dem Versuch, in diese Menge auf vernünftige Weise Ordnung zu bringen. Bei der Definition von Verknüpfungen, mit denen sich das Konstrukt erst als leistungsfähiger Rechenbereich erweist, steht es nicht besser.

- Endlich ist auch die Einbettung der natürlichen Zahlen keineswegs ohne Probleme. Im neugeschaffenen Bereich sind sie gar nicht mehr vorhanden; erst nachträglich stellt man fest, daß sich in ihm Elemente finden lassen, die sich von denen "nicht wesentlich" unterscheiden, die am Beginn des langen Weges standen.

(3) Weitere Bedenken gegen diesen Zugang ergeben sich, wenn wir die Frage nach den Einsatzmöglichkeiten der so erhaltenen Bruchzahlen stellen. Daß diese Zahlenpaarklassen etwas mit Teilungs- und Meßprozessen zu tun haben, kann man nicht einmal ahnen.

Erst im Nachhinein kann man sie als Operatoren auf Größenbereichen einsetzen bzw. deuten, doch erhalten sie auf diese Weise eine Funktion, die ihnen vom Konstruktionsvorgang her fremd ist und künstlich aufgepfropft wird.

Eher als bei Bemühungen um Zahlenbereichserweiterungen trifft man auf solche Zahlenpaarklassen dagegen bei Verhältnisüberlegungen. (Vgl. etwa WINTER, 1969.) Zahlenverhältnisse sind nichts anderes als Paare von natürlichen Zahlen, jeder Klasse der durch die Relation $(a,b) \sim (c,d) \overset{Df}{\Longleftrightarrow} ad = bc$ erzeugten Zerlegung wird eine Verhältniszahl zugeordnet. "Ganzzahlige Verhältnisäquivalenz und Bruchäquivalenz, Verhältniszahl und Bruchzahl haben das gleiche logische Fundament: Äquivalenzklassen in $N \times N$". (WINTER, 1969, S.77) Man kann dies noch verschärfen: Extensional sind Bruchzahlen und Verhältniszahlen nicht zu unterscheiden.

Solche Unterschiede werden erst dann sichtbar, wenn die Entstehungsgeschichte der Klassen berücksichtigt wird. Je nach Ausgangspunkt und Erkenntnisinteresse wird man dabei zu verschiedenen Fassungen der Äquivalenzrelation kommen. Sie führen zu den gleichen Klassen

in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wie die Produktdefinition, sind also im Ergebnis dem klassischen Zugang gleichwertig. Allerdings greifen sie völlig andere Vergleichsverfahren auf, etwa solche, bei denen der Aufbau der Klassen aus "Grundbausteinen" im Mittelpunkt steht.

Auf Versuche dieser Art, genetisch zu den Bruchzahlen hinzuführen, werden wir weiter unten noch genauer eingehen. (Vgl. insbesondere 1.2 und 1.3.)

(4) Es ist nicht verwunderlich, daß ein der skizzierten Standardkonstruktion entsprechendes Vorgehen für den Unterricht kaum vorgeschlagen wird.[1] Dennoch ist sie für unsere weiteren Überlegungen bedeutsam, weil sie das Ziel für alle Zahlbereichserweiterungen sehr deutlich absteckt. Wie auch immer man zu den Bruchzahlen kommt, man bemüht sich um die Erarbeitung des angeordneten Halbkörpers $(\mathbb{B}, +, \cdot, <)$ oder doch um Teilstrukturen. Es geht - auch im Unterricht - am Ende um die Gewinnung eines leistungsfähigeren Rechengebildes mit einer überaus reichhaltigen Struktur. (Siehe dazu WINTER, 1976.)

Dabei treten die Probleme der Paar- und Klassenbildung, der Definition von Verknüpfungen und Ordnung und der Einbettung in verschiedener Weise in jedem Zugang auf. Die Aufgabe der Schaffung neuer Objekte und der sinnvollen Regelung des Umgangs mit ihnen bleibt uneingeschränkt gestellt. Wie dies im Unterricht geschehen kann, ist allerdings eine weiterreichende Frage.

---

1) Vgl. etwa FREUND (1965/66).

1.1.2 Bruchzahlen als Abbildungen (Operatormodell)

(1) Es kann didaktisch nicht befriedigen, die Probleme der Zahlbereichserweiterungen lediglich als ein Stück algebraischer Strukturtheorie anzusehen und die Anstrengungen im Unterricht auf die Elementarisierung der im letzten Abschnitt skizzierten Schritte zu beschränken. Es ist für die Entwicklung der Mathematik zweifellos eine der Triebfedern des Fortschritts gewesen, daß es ihr gelungen ist, sich von Fragen der Anschauung und der Anwendungen zu lösen und - z.B. in der Algebra, der Geometrie, der Wahrscheinlichkeitstheorie - Gebäude zu errichten, die auf von außermathematischen Störungen freien Fundamenten ruhen. Für das lernende Kind ist das Verdrängen außermathematischer Erfahrungen ebenso zweifellos verhängnisvoll.

Schon DEDEKIND (1905, S.10) betont, daß zwar

> "Anknüpfungen an nichtarithmetische Vorstellungen die nächste Veranlassung zur Erweiterung des Zahlbegriffs gegeben haben", dies jedoch " gewiß kein Grund [ist] , diese fremdartigen Betrachtungen selbst in die Arithmetik, in die Wissenschaft von den Zahlen aufzunehmen".

Es drängt sich die Frage auf, für wen diese Betrachtungen "fremdartig" sind: vielleicht für den Mathematiker, obwohl auch er ja von ihnen ausgeht und erst sehr viel später zu Formalisierungen kommt - für den Lernenden wäre es dagegen äußerst fremdartig, wenn man ihm diesen Boden der "nichtarithmetischen Vorstellungen" unter den Füßen wegziehen und ihm damit das natürliche Fundament seines Verständnisses nehmen würde.

Nur am Rande sei erwähnt, daß ein solcher formalistischer Standpunkt auch innermathematisch auf erhebliche

Kritik stößt. So stellt KREISEL (1974) fest,

> "daß formale Regeln wichtig sind - ohne jedoch zu behaupten ..., nur formal gegebene Beziehungen seien wohldefiniert." (S. 65)

Er beschreibt die Entstehung der formalistischen Theorie so:

> "Das allgemeine Schema sieht folgendermaßen aus: Zunächst haben wir eine Entdeckung: mehrere mathematische Begriffe können in einem gegebenen grundlagentheoretischen Rahmen ≪adäquat≫ analysiert werden, obwohl wir sie ursprünglich gar nicht als Objekte aus diesem Rahmen auffassen. Auf diese Entdeckung folgt eine einschränkende Doktrin: nur Definitionen in Begriffen der Theorie werden als präzis zugelassen ....Die Entdeckung selbst kann natürlich nicht innerhalb der Theorie formuliert werden, da sie ja nach Voraussetzung die intuitiven mathematischen Begriffe nicht enthält; die letzteren werden durch ihre Analysen ersetzt." (S. 76)

Wie nützlich das hier beschriebene Vorgehen für den Mathematiker auch sein mag, für den Didaktiker ist es keineswegs brauchbar oder gar befriedigend.

(2) Man kann es kaum der Schulmathematik allein anlasten, daß der Graben zwischen ihr und der mathematischen Wissenschaft immer breiter geworden ist. Wohin sollte sie sich wenden, wenn etwa ein Zugang zu den Bruchzahlen gesucht wurde, der an die Erfahrungen der Kinder anknüpfte statt an innermathematische Denkweisen? Zwar kommen auch in der Schule algebraische Aspekte ins Spiel (Lösbarkeit von Gleichungen), aber näherliegender und fundamentaler sind Meß- und Teilungsprozesse, von denen her man die Unzulänglichkeit der natürlichen Zahlen entdeckt und so zur Schaffung neuer leistungsfähigerer Zahlen angeregt wird.

(3) Schon sehr früh hat WEYL (1966, Original 1928) auf einen entsprechenden Weg zu den Bruchzahlen hingewiesen. In einem "genetischen Aufbau des mathematischen Zahlenreichs" (S. 47) gewinnt man Brüche fast zwangsläufig als "Operationen" auf "Größengebieten" (S. 47ff.). Man ist überrascht, hier in außerordentlicher Klarheit bereits fast alle Grundgedanken zu finden, die zahlreiche Autoren sehr viel später wiederentdeckt haben.

Die erste Arbeit, in der die aus diesem Ansatz sich ergebenden didaktischen Möglichkeiten analysiert worden sind, ist wohl die von LUGOWSKI (1962).

Der Titel gibt bereits das Ziel an: "Eine axiomatische Grundlegung des anschaulich-genetischen Aufbaus der Arithmetik in der Schulmathematik".

LUGOWSKI (S. 299) stellt zunächst fest:

> "Hochschulmathematik und Schulmathematik gehen innerhalb des Aufbaus der Arithmetik bei der Erweiterung von Zahlbereichen n i c h t einfach parallel auf verschiedenen Niveaustufen vor - oder mit anderen Worten: Die Schulmathematik stellt auf diesem Gebiet nicht einfach ein Spiegelbild der Hochschulmathematik auf niedrigerem Niveau dar".

Insbesondere hebt LUGOWSKI (S. 299) diesen Unterschied hervor:

> "Während also die Hochschulmathematik die zu vollziehende Erweiterung von Zahlenbereichen auf einem rein 'formal-logischen' Wege vornimmt und erst nachträglich die ... Anwendbarkeit der Zahlen nachprüft, geht die Schulmathematik aus didaktisch-psychologischen Gründen auf einem 'inhaltlichen' Wege vor, indem sie von Stufe zu Stufe im Aufbau der Zahlenrechnung die Zahlen als Maßzahlen von außerarithmetischen Größen einführt und die Relationen und Operationen zwischen ihnen gerade so erklärt, daß sie die entsprechenden Rechenvorgänge zwischen den Größen ...beschreiben."

Die Lösung, die LUGOWSKI vorschlägt, um das Vorgehen in der Schule mathematisch befriedigend zu beschreiben, ist recht einfach. Die natürlichen Zahlen werden zunächst zu Operatoren auf Größenbereichen umgedeutet. Jeder Erweiterungsschritt läßt sich dann als Erweiterung des jeweils vorhandenen Operatorenbereiches auffassen. Die Eigenschaften der Operatorenbereiche gewinnt man aus denen der zugrundeliegenden Größenbereiche. (So etwa braucht man zur Konstruktion der positiven reellen Zahlen einen natürlich geordneten stetigen Halbmodul.) Die Annahme, daß entsprechende Größenbereiche vorhanden sind, kann sich dabei natürlich zunächst nur auf außerarithmetische Erfahrungen stützen.

(4) Für unsere weiteren Überlegungen beschränken wir uns auf die Erweiterung der natürlichen zu den Bruchzahlen. Insbesondere werden damit die Fragen der Konstruktion der positiven reellen Zahlen und der jeweiligen Differenzenringe ($\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $\mathbb{B} \to \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$) ausgeklammert.[1)]

Der entscheidende Schritt besteht darin, Brüche als Operatoren eines Größenbereichs mit Teilbarkeitseigenschaft einzuführen. Auch in diesem Zugang geht man von Paaren natürlicher Zahlen aus, deutet sie aber von vornherein als Abbildungen. Der Bruch $\frac{a}{b}$ beschreibt die Abbildung $G \to G$ mit $g \mapsto a(\frac{1}{b}\, g)$. Die Klassenbildung braucht man in diesem Ansatz nicht zu thematisieren. Sie verbirgt sich in der Erfahrung, daß zu verschiedenen Zahlenpaaren die gleiche Abbildung gehört. Man erhält so in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Äquivalenzrelation:
$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Longleftrightarrow a_1 (\frac{1}{b_1}\, g) = a_2 (\frac{1}{b_2}\, g)$.
Definiert man Ordnung, Addition und Multiplikation (letztere über die Verkettung der Abbildungen) in naheliegender Weise, so wird der konstruierte Operatorenbereich zu einem Modell des bis auf Isomorphie eindeutig

---

1) Vgl. LUGOWSKI (1962), S. 311ff.

bestimmten Quotientenhalbkörpers von $\mathbb{N}$, dem Halbkörper der Bruchzahlen.

(5) Dieser Zugang zu den Bruchzahlen ist in vielen weiteren Arbeiten aufgegriffen und auf seine unterrichtliche Realisierung hin diskutiert worden.
Ansätze findet man bereits in einer frühen Arbeit von GRIESEL (1959), in der er das Vorgehen der Schulmathematik analysiert und mit Mitteln der Verbandstheorie beschreibt. Dies führt ihn zur Definition (S. 206):

> "Der Bruch $\frac{m}{n}$ ist die Klasse aller Quadrupel $(T, E, \mathfrak{T}, \sim)$, für die gilt: T ist m-facher n-ter Teil von E im Teilungssystem $\mathfrak{T}$."[1)]

Damit ist ein Bruch als eine Menge von Größenpaaren definiert. GRIESEL (S. 207) weist darauf hin,

> "wieviel Abstraktionsprozesse der Schüler durchführen muß, ehe er zum Begriff des Bruches $\frac{m}{n}$ gelangt. Zunächst muß er im festen Teilungssystem von der Einheit E abstrahieren, sodann vom Teilungssystem $\mathfrak{T}$ mit seiner Äquivalenzrelation $\sim$."

Die Addition erhält man dann über die Vereinigung disjunkter Elemente eines solchen Teilungssystems, die Multiplikation mit Hilfe der Hintereinanderausführung von Teilungsprozessen. Allerdings werden noch nicht diese Teilungsprozesse selbst explizit als Brüche aufgefaßt. Das macht den Ansatz einigermaßen unhandlich, vor allem bleibt so das Problem einer befriedigenden Behandlung der Multiplikation von Brüchen ungelöst.

Zum Teil angeregt durch die Analyse von LUGOWSKI, zum Teil vielleicht auch unabhängig von ihr, sind in den Jahren seit 1967 zahlreiche Aufsätze zur Didaktik der

---

1) Teilungssysteme sind spezielle Verbände mit Teilbarkeitseigenschaft und einer Äquivalenzrelation~, die gewisse Elemente als "gleichwertig" anzusehen erlaubt. Beispiel: Gesamtheit der endlichen Vereinigungen von Kreisausschnitten mit der Zerlegungsgleichheit als Äquivalenzrelation.

Bruchrechnung erschienen. Erwähnt seien die Arbeiten von BRAUNFELD (1969), DIENES (1968), GRIESEL (1968, 1970), PICKERT (1968), in denen die Gewinnung von Bruchzahlen als Operatoren von Größenbereichen ausführlich beschrieben wird.
Für die unterrichtspraktische Verwirklichung hat sich vor allem der Vorschlag BRAUNFELDs (1969) als fruchtbar erwiesen, Bruchoperatoren durch Maschinen zu konkretisieren, die jeweils aus einem "Strecker"- und einem "Staucher"-Baustein bestehen.[1] Diese Konkretisierung erst ermöglicht es, Operatoren als Objekte zu begreifen, die man sich vorstellen und mit denen man umgehen kann.

Das Ziel unserer Ausführungen besteht nicht darin, den Aufbau der Bruchrechnung bis ins Detail nachzuzeichnen, sondern einige der Grundzüge der Gewinnung von Bruchzahlen herauszuarbeiten. Dazu sei vor allem auf die ausführliche Darstellung von KIRSCH (1970) verwiesen. Einige Stichworte:

- "Rohmaterial" sind Größenbereiche $(G,+,<)$, kommutative Halbgruppen mit einer natürlichen Ordnung ($a < b \Leftrightarrow a + x = b$ ist in G lösbar), für die das Trichotomiegesetz gilt.

- In jedem Größenbereich kann man Vervielfachungsabbildungen rekursiv definieren:
  $1 \cdot g = g$; $(n + 1) \cdot g = ng + g$.

  Die natürlichen Zahlen werden so umgedeutet zu Abbildungen $(n : g \mapsto ng)$, die mit der Verkettung als Verknüpfung eine Halbgruppe bilden.
  Es ist $n \circ m = nm$. Wie üblich definiert man Addition $\oplus$ und Ordnung $\lessdot$ für diese Abbildungen.

---

1) Vgl. auch BRAUNFELD (1969a) und BRAUNFELD/DILLEY/RUCKER (1967)

($\mathbb{N}$, $\oplus$, $\leqslant$) ist selbst ein Größenbereich mit Induktionseigenschaft.[1)]

- Mit dieser Umdeutung hat man die natürlichen Zahlen aus einer rein kardinalen Sicht herausgelöst und damit Anstöße und Möglichkeiten für Zahlbereichserweiterungen geschaffen. Legt man im weiteren einen Größenbereich mit Teilbarkeitseigenschaft zugrunde, so sind die natürlichen Operatoren und damit ihre Umkehrabbildungen Automorphismen des jeweils gewählten Größenbereichs. Bruchzahlen sind dann alle Operatoren der Form $m \circ n^{-1}$, also auch wieder Automorphismen von G.[2)]

- Die so erhaltene Menge $\mathbb{B}$ von Operatoren ist die kleinste Menge, die $\mathbb{N}$ umfaßt und bezüglich der Inversenbildung und der Verkettung abgeschlossen ist.

---

1) Die so erhaltene Abbildungsmenge ist die kleinste Menge von Operatoren in einem Größenbereich, die die 1 und mit jedem Operator f auch f $\oplus$ 1 enthält. Dieser Satz kann auch zur Definition der natürlichen Zahlen dienen. (Vgl. KIRSCH, 1970a.)

2) Verzichtet man auf die Teilbarkeitseigenschaft, so hat man einige Schwierigkeiten wegen der fehlenden Surjektivität der Operatoren. Man muß in diesem Falle Operatoren als gleichwertig definieren, wenn ihre Beschränkungen auf den Durchschnitt der jeweiligen Definitionsbereiche gleich sind. Vor diesem Problem steht DIENES (1968), wenn er Bruchzahlen als Operatoren auf der Menge der natürlichen Zahlen konzipiert. Erschwerend kommt noch hinzu, daß er die natürlichen Zahlen nicht als Größen, sondern als Kardinalzahlen sieht. So wird das Fundament für die Bruchzahlen ziemlich schwach.

- Analog dem Vorgehen bei den natürlichen Operatoren läßt sich nun auch die Menge der Bruchzahlen strukturieren. $(\mathbb{B}, \circ)$ ist eine abelsche Gruppe, $(\mathbb{B}, +, <)$ stellt sich wieder als Größenbereich mit Teilbarkeitseigenschaft heraus, der zusätzlich - im Gegensatz etwa zum Größenbereich L der Längen - die Kommensurabilität besitzt.
  Dadurch ist $(\mathbb{B}, +, <)$ auch bereits eindeutig charakterisiert: Zwei Größenbereiche G und G^* mit (Teilb) und (Koms) -"bürgerliche" (KIRSCH, 1970, S. 153ff) - sind isomorph. Wählt man in jedem ein Element (E bzw. E^*) aus, so gibt es genau einen Isomorphismus, der E auf E^* abbildet.[1)]
  Endlich hat man mit $(\mathbb{B}, +, \circ, <)$ einen angeordneten Halbkörper, eben den Quotientenhalbkörper von $\mathbb{N}$.

- Bedeutsam für die didaktische Diskussion ist die Tatsache, daß man ein Großteil der Struktur von $\mathbb{B}$ bereits erschließen kann, wenn man nach Auswahl eines beliebigen Elementes E eines Größenbereichs alle rationalen Vielfachen $\frac{m}{n}$ E bildet.
  Diese Menge $G_E \subset G$, mit der im Größenbereich vorhandenen Ordnungs- und Additionsstruktur versehen, gibt die entsprechenden Strukturen von $\mathbb{B}$ unverfälscht wieder: $(G_E, +, <)$ ist isomorph zu $(\mathbb{B}, +, <)$.
  Damit eröffnet sich schon vor dem Übergang zu Abbildungen ein weites Feld für "konkrete Bruchrechnung"[2)], die weitgehend mit den Inhalten des traditionellen Bruchrechnens identisch ist. Für diese Aktivitäten ist so auch im Operatorzugang ein aus-

---

1) Geht man von einem beliebigen Größenbereich (etwa L) aus, so wird durch die Kommensurabilität eine Äquivalenzrelation definiert. Jede Klasse ist ein Größenbereich mit (Koms) und (Teilb), damit isomorph zu $(\mathbb{B}, +, <)$. (Vgl. KIRSCH, 1970, S. 153.)

2) Vgl. KIRSCH (1970, S. 119ff).

reichender Spielraum, der unbedingt genutzt werden muß. Man kann in G_E vervielfachen, teilen, messen, nur bei der Multiplikation wird eine Erweiterung des Verständnishorizontes notwendig.

- In der bisherigen Skizzierung sind wir auf den zugrundegelegten Größenbereich nicht näher eingegangen. Zwei Bemerkungen sind notwendig. Zunächst sind Bruchzahlen, als Operatoren eines Größenbereichs definiert, natürlich an diesen Bereich gebunden. Allerdings sind die Bruchzahlen, die man, von verschiedenen Größenbereichen mit (Teilb) ausgehend, erhält, kaum zu unterscheiden: Ein Operator $\frac{m}{n}$ verarbeitet Längen in gleicher Weise wie Flächeninhalte u.a.. Dadurch wird die Abstraktion vom jeweils gewählten Grundbereich unproblematisch. Dies entspricht durchaus auch dem unterrichtlichen Vorgehen, bei dem verschiedenartige Größen Teilungsprozessen unterworfen werden und - am Ende - nur noch Aussagen über diese Prozesse stehen.

  Endlich ist noch zu erwähnen, daß sich die Existenz von Größenbereichen mit (Teilb) leicht nachweisen läßt. Zu jedem Größenbereich G kann man mit Hilfe der natürlichen Zahlen einen Größenbereich G konstruieren, der diese Eigenschaft besitzt. Die Konstruktion, die im einzelnen bei KIRSCH (1970, S. 154ff) nachzulesen ist, entspricht im Falle G = $\mathbb{N}$ dem Standardvorgehen zur Gewinnung der Bruchzahlen.

(6) Der geschilderte Weg zu den Bruchzahlen ist in den letzten Jahren zu einer breiten und gut befestigten Straße ausgebaut worden. Gleichzeitig damit sind Meßprozesse und die Struktur von Größenbereichen genauer analysiert worden. (WHITNEY, 1968, GRIESEL, 1969) Vor allem aber geht Hand in Hand mit dieser

Entwicklung eine stärkere Betonung und Thematisierung des Abbildungscharakters von Zahlen, der durchgehend bei der Erarbeitung und Erweiterung von Zahlbereichen zum Tragen kommt. (KIRSCH, 1970a, 1973, SEEBACH, 1971, GRIESEL, 1973a.)

Auf die Umsetzung des Operatormodells in den Schulunterricht wollen wir hier nicht eingehen. Sie ist wohl zuerst in einem von P. BRAUNFELD und anderen im Auftrag des UISCM durchgeführten Projekt vorgenommen worden.[1)]

In der didaktischen Literatur der BRD gibt es ebenfalls zahlreiche entsprechende Vorschläge.[2)]
Zudem haben diese Entwicklungen in fast allen Schulbüchern und Lehrplänen ihren Niederschlag gefunden.[3)] In neuester Zeit ist dabei - durchaus folgerichtig - eine Abkehr von einem puristischen Operatormodell zu beobachten, wie man sehr deutlich z.B. bei der Lektüre der Neubearbeitung des Lehrwerks von WINTER/ZIEGLER (1976) feststellt.

---

1) Vgl. dazu BRAUNFELD (1969), BRAUNFELD/DILLEY/RUCKER (1967) und das von BRAUNFELD und seinen Mitarbeitern erstellte Unterrichtsprogramm "Stretchers and Shrinkers" (1969a).

2) Erwähnt seien WECKESSER (1970) und GRIESEL (1973).

3) Vgl. etwa stellvertretend für viele andere WINTER/ZIEGLER, Bd. 6 (1970) und die Richtlinien und Lehrpläne für die Orientierungsstufe in NW (1973).

1.2 Historische Entwicklung des Bruchbegriffes

(1) Wenn wir in diesem Abschnitt einige wichtige Züge der historischen Entwicklung des Verhältnisdenkens verfolgen, dann gewiß nicht darum, um dem dabei aufgedeckten Weg schlicht auch im Unterricht zu folgen. In diesem Sinne kann die These, daß sich in der Entwicklung des Individuums im Kleinen die Entwicklung der Menschheit widerspiegelt oder gar wiederholt, nicht verstanden werden. Wohl aber kann man im historischen Rückblick insbesondere für didaktische Fragen vieles lernen.
Die Fragen, vor denen etwa die griechischen Mathematiker (EUDOXOS, EUKLID) gestanden haben, sind erstaunlich verwandt mit denen des Kindes, das mit Verhältnissituationen fertig zu werden versucht. Und man ist stets aufs Neue überrascht, wie ähnlich die Wege sind, auf denen die "erwachende Wissenschaft" (VAN DER WAERDEN) und das erwachende kindliche Denken voranschreiten. Vieles von diesem Versuch, sinnvoll und beharrlich zu neuer Erkenntnis zu gelangen, wird später von formalen Konstruktionen zu leicht verschüttet.

(2) Wir können und wollen hier natürlich keinen Beitrag zur Mathematikgeschichte leisten. Die folgenden Stichworte stützen sich im wesentlichen auf vorliegende Arbeiten, insbesondere zur griechischen Mathematik.
(Vgl. BOURBAKI, 1971, VAN DER WAERDEN, 1956, GERICKE, 1970, KROPP, 1969, SMITH, 1958, LORENZEN, 1960.)
Unser Ziel wird sein, diese Darstellungen mit ständigem Blick auf didaktische Fragen und Ansätze zu diskutieren, um so Hinweise auf die Genese des Verhältnisbegriffs beim Kinde zu gewinnen.
Zentrale Quelle unserer Kenntnis der griechischen Mathematik und ihrer Probleme sind die "Elemente" des EUKLID[1],

---

1) Übertragung ins Deutsche: THAER (1962)

in denen das mathematische Wissen seiner Zeit (um 300 v. Chr.) zusammengefaßt ist. In die Bücher, in denen die Proportionenlehre entwickelt wird, sind eine Vielzahl von Ergebnissen anderer Mathematiker eingegangen. So enthält das Buch VII die schon weit früher von den Pythagoräern ausgearbeitete Lehre von den Zahlenverhältnissen, Buch V wird dem EUDOXOS zugeschrieben und bringt als entscheidenden Fortschritt die Möglichkeit zur Erfassung beliebiger Größenverhältnisse und damit des Irrationalen, Buch X greift Ergebnisse des THEAITETOS auf.

(3) Während nicht-griechische Mathematiker und Rechner vor und nach EUKLID (die Babylonier ebenso wie die Ägypter, die Römer und in ihrem Gefolge das Mittelalter) Brüche in vielfältiger Weise zur Bezeichnung von Größen und deren Teilen benutzten[1] - mehr oder weniger naiv und erfolgreich -, treten in der griechischen Mathematik Begründungs- und Definitionsfragen in einer Rigorosität in den Vordergrund, über die wir nur staunen können. Sicher wurde "nebenher" auch mit Brüchen wie $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, ... praktisch gerechnet. GERICKE (1970, S. 36) weist darauf hin, daß das Addieren mittels eines Hauptnenners bereits von den Ägyptern geübt wurde und auch Bildungen wie "$\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{3}$" schon im Papyrus Rhind vorkommen.
Er schreibt weiter (S. 36/37):

> "Stellen wir uns vor, daß in dieser Situation die Frage entsteht, ob ein Bruch oder vielmehr ein Ausdruck wie $\frac{3}{4}$ eine Zahl ist. Die Antwort muß 'Nein' lauten, auch wenn man noch gar nicht an eine besonders strenge Definition von 'Zahl' denkt, sondern eine Zahl nur dadurch kennzeichnet, daß sie eine

---

1) Vgl. etwa GERICKE (1970), MENNINGER (1958).

> Anzahl von Gegenständen oder Einheiten ist. $\frac{3}{4}$ ist keine Anzahl. Wollte man sagen: die Anzahl der Viertel, so wäre die Anzahl 3; die Angabe 'Viertel' ist eben dabei unentbehrlich.... Man kann wohl sagen: $\frac{3}{4}$ ist das, was sich zum Ganzen verhält wie 3 zu 4.... Ich möchte damit die Behauptung zur Diskussion stellen: Als sich die griechischen Mathematiker überlegten, ob ein Ausdruck wie $\frac{3}{4}$ eine Zahl ist, konnten sie zwanglos auf den Gedanken kommen: Brüche sind ihrem eigentlichen Wesen nach Zahlenverhältnisse."

So bleibt denn in der Folge der Begriff "Zahl" bei den Griechen den natürlichen Zahlen vorbehalten - sogar die 1 wird ausgenommen -, und neben die Zahlen wird eine Theorie der Zahlenverhältnisse gestellt, die im Buch VII der "Elemente" zusammengefaßt ist.

(4) Zahlenverhältnisse

Bezeichnend für die klassische griechische Mathematik ist, daß nicht definiert wird, was ein Verhältnis ist, sondern wie man mit Verhältnissen umgeht. Es wird zunächst erklärt, wann eine Zahl eine andere mißt (nämlich a mißt b, wenn es eine Zahl n gibt mit $a \cdot n = b$) und was es heißt, "eine Zahl ist eine Menge von Teilen einer anderen" (a ist eine Menge von Teilen von b, wenn es teilerfremde Zahlen m, n gibt mit $a = m \cdot \frac{b}{n}$).[1)]

Nach diesen Vorarbeiten wird im Buch VII durch die "Definition 20" geregelt, wann Zahlen "in Proportion stehen". Wörtlich:

> "Zahlen stehen in Proportion, wenn die erste von der zweiten Gleichvielfaches oder derselbe Teil oder dieselbe Menge von Teilen ist wie die dritte von der vierten."

---

1) Vgl. dazu THAER (1962). Die hier gegebenen Fassungen findet man etwa bei GERICKE (1970). MALMENDIER (1975) hat eine Axiomatik zum Buch VII gegeben, in dem die verwendeten Begriffe mit strukturmathematischen Mitteln präzisiert werden.

Diese Definition ist die Grundlage einer Vielzahl von Sätzen über den Umgang mit Verhältnissen. In dieser Definition klingen nun unüberhörbare Operatortöne an. Es liegt nahe, sie in folgende moderne Fassung zu bringen (GERICKE, 1970, S. 34):

> "a : b = c : d gilt genau dann, wenn es zwei teilerfremde Zahlen m,n gibt mit:
> $a = m \cdot \frac{b}{n}$ und $c = m \cdot \frac{d}{n}$."

Verhältnisgleichheit läßt sich damit als "Herstellungsgleichheit" interpretieren: a entsteht aus b durch denselben Teilungs-Vervielfachungs-Prozeß wie c aus d. Auf diese Deutung werden wir noch an verschiedenen Stellen zurückkommen. BOURBAKI (1971, S. 173) betont diesen Aspekt noch stärker:

> "Die Verhältnisse ganzer Zahlen werden von den klassischen griechischen Mathematikern als Operatoren aufgefaßt, die auf der Menge der ganzen Zahlen oder auf einer Teilmenge dieser Menge definiert sind (das Verhältnis von p zu q ist der Operator, der N, falls N ein Vielfaches von q ist, die ganze Zahl p(N/q) zuordnet); die Operatoren bilden eine multiplikative Gruppe, aber kein System mit zweifacher Verknüpfungsvorschrift."

Das scheint einer der wesentlichen Gründe für die Nichtanerkennung der Verhältnisse als Zahlen gewesen zu sein,

> "denn das Wort 'Zahl' ist für die Griechen (und auch für die modernen Mathematiker bis in die jüngste Zeit) mit der Vorstellung von einem System mit zweifacher Verknüpfungsvorschrift (Addition und Multiplikation) verbunden". (BOURBAKI, S. 173).

(5) Didaktische Anmerkungen

Beim Studium griechischer Mathematik ist man überrascht, wie eng die dort sichtbar werdenden Positionen und Probleme mit denen des lernenden Kindes verwandt sind. Man hat zunächst in den natürlichen Zahlen einen Bereich

mit zwei Verknüpfungen, in dem sich einigermaßen befriedigend rechnen läßt. In zwei Richtungen nun kommt man zu neuen Überlegungen. Einmal kann man die Zahlen einsetzen, um Größen zu vervielfachen und zu teilen. Dabei erhält man Ausdrücke wie "$\frac{3}{4}$ Stunde", "$\frac{2}{3}$ von 12 Schafen". Bei der Lösung praktischer Probleme helfen diese Gebilde durchaus weiter, man kann - bindet man Überlegungen an eine feste Einheitsgröße - sogar addieren. Allerdings liegt hier die Definition einer Multiplikation weniger nahe. Auf der anderen Seite kommt man von Verhältnisüberlegungen mit einiger Mühe zur Multiplikation (nämlich als Verkettung der hinter den Zahlenpaaren stehenden Operatoren), doch tritt die additive Struktur zunächst zurück.
Auf beiden Wegen findet so etwas wie Zahlbereichserweiterung durchaus nicht statt. Mehr noch: Sowohl für die griechischen Mathematiker[1] wie auch für Kinder sind Verhältnisse keineswegs neue Objekte. Zwar ist die Relation der Verhältnisgleichheit - wie man leicht zeigen kann - eine Äquivalenzrelation, doch wäre der weitere Schritt, die erzeugten Äquivalenzklassen extensional zu definieren und gar als neugewonnene Zahlen zu akzeptieren, geradezu eine Zumutung. Will man auf ehrliche Weise weiterkommen, so geht das zunächst in der Tat wohl am besten auf einem Wege, der dem griechischen folgt. Erst nach und nach werden dabei Verhältnisse als Klassen von Zahlenpaaren in den Blick kommen. Keineswegs kann eine solche Klassenbildung als brauchbares Werkzeug oder gar als "Zange" bei der Geburt des Verständnisses dienen. (Vgl. THOM, 1973.)

(6) Größenverhältnisse

Die skizzierten Überlegungen reichen nicht aus, wenn man Verhältnisse nicht nur von Zahlen, sondern von Größen bilden möchte. Die erwähnte Definition der

---

1) Vgl. BECKMANN (1974).

Verhältnisgleichheit ist nur in den Fällen brauchbar, in denen die Größen kommensurabel sind. Ist dies nicht der Fall, so ist keine der Größen "Teil oder Menge von Teilen" der anderen. Durch die Entdeckung der Inkommensurabilität (etwa der Längen von Seite und Diagonale eines Quadrats) wurde das bisher errichtete mathematische Gebäude schwer erschüttert. HASSE/SCHOLZ (1928) sprechen von einer "Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik", die zur Aufgabe eines Weltbildes zwang, das alle Erscheinungen auf Zahlen zurückzuführen versuchte. Wie konnte man aus diesem Dilemma herauskommen? VAN DER WAERDEN (1956) vermutet aufgrund verschiedener Quellen, daß es zunächst THEAITETOS war, der dieses Problem gelöst hat, allerdings nicht auf einem Wege, wie er bei EUKLID im Buch V beschritten wird (und auf den wir etwas später eingehen werden). VAN DER WAERDEN rekonstruiert diese Definition (S. 288):

> "Zwei Größen a und b sind proportional zu c und d, wenn die Antanairesis, das abwechselnde Wegnehmen der kleineren von der größeren, bei a und b genau so verläuft, wie bei c und d, das heißt, wenn a genau so oft von b (oder b von a) abgezogen werden kann wie c von d (oder d von c), und die Reste wieder genau so oft, usw."

Diese Definition läßt sich leicht in formaler Fassung schreiben (vgl. GERICKE, 1970, S. 39ff). Um nachzuprüfen, ob a und b das gleiche Verhältnis haben wie A und B, bestimmt man Schritt für Schritt die maximalen natürlichen Zahlen q_i, Q_i mit:

$$a = q_1 b + r_1 \,, \qquad A = Q_1 B + R_1$$

$$b = q_2 r_1 + r_2 \,, \qquad B = Q_2 R_1 + R_2$$

$$r = q_3 r_2 + r_3 \,, \qquad R = Q_3 R_2 + R_3 \quad \text{usw.}$$

Nun ist genau dann a:b = A:B, wenn $q_i = Q_i$ für alle i gilt. Wenn a,b bzw. A,B kommensurabel sind, besteht dieses Verfahren nur aus endlich vielen Schritten,und der "Euklidische Algorithmus" liefert das größte gemeinsame Maß. Doch auch wenn diese Wechselwegnahme nicht

abbricht, stellt sie ein brauchbares Verfahren zum Nachweis der Verhältnisgleichheit dar. (Man kann so leicht zur Darstellung der Maßzahlen durch -endliche oder unendliche -Kettenbrüche kommen.) Mit dieser Definition läßt sich - wie BECKER (1933) gezeigt hat - eine Verhältnislehre aufbauen. Der Vertauschungssatz ($a:b = A:B \Rightarrow a:A = b:B$) ist mit Hilfe des geschilderten Meßverfahrens allerdings nur dann zu beweisen, wenn alle vier Größen aus demselben Größenbereich stammen.
Im Buch V des EUKLID, das dem EUDOXOS zugeschrieben wird, findet man die Definition des THEAITETOS nicht mehr. Stattdessen wird zunächst die Theorie der Größen axiomatisch begründet.[1] Ein Größenbereich ist - in unserer Terminologie beschrieben - eine kommutative additive Halbgruppe, in der eine mit der Addition verträgliche Ordnungsrelation mit Trichotomieeigenschaft existiert. Mit Hilfe der Addition lassen sich Vielfache von Größen rekursiv definieren, die natürlichen Zahlen bilden einen Operatorenbereich. Entscheidend für das Weitere endlich ist die "Archimedizität" des Größenbereichs: Zu jedem a und b gibt es eine natürliche Zahl n mit $a < nb$. (Daß diese Forderung nicht auf ARCHIMEDES, sondern auf EUDOXOS zurüchgeführt wird, spielt hier keine Rolle.) Für diese Größen wird nun "Verhältnisgleichheit" definiert. Bei EUKLID/EUDOXOS (siehe THAER, 1962, S. 91) geschieht das in der berühmten Definition 5 des Buches V in folgender Form:

> "Man sagt, daß Größen in demselben Verhältnis stehen, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind."

---

1) Vgl. die Darstellungen von BECKMANN (1974), BOURBAKI (1971), LORENZEN (1960).

Ausführlich und in uns vertrauter Fassung geschrieben:

> Die Größen a, b, c, d seien gegeben.
> a:b = c:d gilt genau dann, wenn für beliebige natürliche Zahlen m,n stets gilt:
> Aus $ma \gtreqless nb$ folgt $mc \gtreqless nd$.

Auf dieser Definition (und einer entsprechend zu definierenden Ordnungsrelation für Verhältnisse) wird im Buch V des EUKLID im weiteren die Theorie der Größenverhältnisse aufgebaut. Das Ergebnis dieser Anstrengungen faßt LORENZEN so zusammen:

> "Das, was die Eudoxische Theorie leistet, ist gerade dieses, ohne Voraussetzung anderer Zahlen als der rationalen (d.h. der Verhältnisse ganzer Zahlen) die Rede von Verhältnissen beliebiger Größen zu ermöglichen. EUDOXOS muß sich darüber im klaren gewesen sein, daß es dazu nicht erforderlich ist, eine explizite Definition solcher Verhältnisse zu geben, sondern daß es genügt, zu definieren, wie man solche Verhältnisse der Größe nach vergleichen kann. Also nicht nur die Größen selbst sollen geordnet sein, es sollen auch die Verhältnisse untereinander geordnet werden - und dabei durch diese Ordnung gerade definiert werden." (LORENZEN, 1960, S. 85).

Damit ist zwar keine Zahlbereichserweiterung erfolgt, wohl aber eine erhebliche Erweiterung der Möglichkeiten, Zahlen einzusetzen. BOURBAKI (1971, S. 174) stellt fest, daß

> "die Größen ein und derselben Art für EUDOXOS ein System mit einer inneren Verknüpfungsvorschrift (der Addition) bilden, doch dieses System besitzt auch noch eine äußere Verknüpfungsvorschrift mit den Größenverhältnissen als Operatoren, und diese bilden eine multiplikative abelsche Gruppe".

Er weist darauf hin, daß die Griechen

> "mit der Addition der Größen und der Multiplikation

der Größenverhältnisse das Äquivalent zu unserem Körper der reellen Zahlen besaßen ...".(S. 175)[1]

Daß dieser Abbildungsgedanke in der Tat in der griechischen Proportionenlehre bedeutsam ist und sich Proportionen sogar zwanglos als Automorphismen von Größenbereichen deuten lassen, hat BECKMANN (1974) gezeigt. Gleichwertig zu den im Vorhergehenden diskutierten Aussagen ist dann die Feststellung, daß die Menge der durch die Proportionen gegebenen Automorphismen einen total geordneten Archimedischen Halbkörper bilden.

(7) Noch einmal: Didaktische Anmerkungen

Für unsere didaktische Diskussion liegt der Schwerpunkt sicher nicht auf dem Problem des Irrationalen, mit dem EUDOXOS zu kämpfen hatte und das er in faszinierender Weise gelöst hat. Strebt man nur die Gewinnung rationaler Verhältnisse an, damit die Bruchzahlen, so kommt man auf dem in (4) geschilderten, von den Fallstricken des Irrationalen noch nicht versperrten Weg durchaus leichter zum Ziel.

Dennoch kann uns die Analyse auch der weiteren historischen Entwicklung einige wichtige Hinweise für unsere Überlegungen geben:

- Hinter allen Anstrengungen stehen Meßvorgänge, d.h. der Versuch anzugeben, wie oft eine Zahl oder Größe in einer anderen steckt.
- Als Werkzeuge sind nur natürliche Zahlen verfügbar. Es werden durchaus nicht zunächst auf irgendeinem Wege Bruchzahlen oder gar reelle Zahlen konstruiert, sondern deren Gewinnung ist untrennbar mit Verhältnisüberlegungen verbunden.

---

1) Vgl. auch die Bemerkung von KROPP (1969, S. 41): "Im Grunde hat EUDOXOS den sog. Dedekindschen Schnitt vorweggenommen."

- Verhältnisse werden nicht explizit definiert, sondern nach und nach durch vielfältige Bemühungen um Verhältnisvergleiche "eingefangen".
- Dabei bewegt sich das Denken ständig auf zwei Ebenen, auf der Ebene der Größen und der Größenpaare. Sich von den Größen zu lösen und zu den Größenpaaren zu gelangen, ist ein zentrales Problem in der geschichtlichen Entwicklung und wohl auch in der kognitiven Entwicklung des Individuums.
- Zwar kann man Verhältnisse durch Abbildungen beschreiben. Aber damit hat man durchaus keine "Wunderwaffe" gewonnen. Zur multiplikativen Struktur solcher Abbildungsmengen kommt man noch sehr natürlich, die additive Struktur dagegen ist ziemlich fest mit der Größenebene verhaftet. Beide Aspekte werden jedoch gleichermaßen benötigt.
- Daß man auf diesem Wege nicht schnell und zügig zu Zahlbereichserweiterungen kommt, ist nicht überraschend. Das mag einen Algebraiker stören, doch ist für die griechischen Mathematiker ebenso wie für Menschen der Gegenwart das Problem, mit Verhältnissituationen fertigzuwerden, sehr viel drängender und näherliegender als das, einen leistungsfähigen Rechenbereich zu konstruieren.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß das griechische Vorgehen auch heute noch besticht und für didaktische Bemühungen Vorbild sein kann: Es ist in höchstem Maße genetisch, denn es führt von einer soliden Basis ausgehend in überschaubaren und sinnvollen Schritten zu neuer Erkenntnis. Zudem ist es ehrlich: Es deckt Schwierigkeiten nicht zu oder erschlägt sie mit undurchsichtigen Mitteln, sondern stellt sich ständig der Komplexität des Verhältnisbegriffes.

Diesen beiden Forderungen muß auch der Unterricht gerecht werden. Es gibt zahlreiche Wege zu den Bruchzahlen, die mathematisch exakt ausgearbeitet werden können. Unbestritten haben auch solche eigenen Reiz und Wert, bei denen etwa Zeichen und der Aufbau eines Kalküls im Mittelpunkt stehen. Das gleiche gilt für axiomatische Zugänge. Nur eben bringen sie uns im Unterricht kaum dem Ziel näher, eine breite Verständnisbasis zu schaffen.

1.3 Natürlichkeit und Reichweite der Zugänge zum Bruch- und Verhältnisbegriff

1.3.1 Probleme eines "lernorientierten" Zugangs zu Brüchen und Verhältnissen

(1) Bei den bisherigen Überlegungen standen mathematische Überlegungen im Mittelpunkt, nicht nur bei der Standardkonstruktion der Bruchzahlen, sondern weitgehend auch beim Operatormodell. Denkt man an die von LUGOWSKI und vielen weiteren vorgelegten Analysen, so fällt auf, daß zwar durchaus versucht wird, gewisse natürliche Zugänge mathematisch zu unterbauen und zu beschreiben, daß aber noch nicht der weiterreichende Versuch unternommen wird, von einer Analyse einschlägiger Situationen und Erfahrungen des Lernenden ausgehend die Begriffsgenese zu verfolgen. Immerhin ist es bemerkenswert, daß die Frage nach natürlichen Zugängen zu den verschiedenen Zahlbereichen in den letzten Jahren immer nachdrücklicher gestellt worden ist.
So betont GRIESEL (1973, S. 54):

> "Die konstruktive Zurückführung auf die natürlichen Zahlen ist eine E n d s t u f e im L e r n p r o z e ß."

Aber:

> "Offensichtlich erfolgt der n a t ü r l i c h e Z u g a n g zu den rationalen Zahlen auf einem anderen Wege", nämlich durch "Herauslösen aus Umweltbezügen und elementaren Anwendungssituationen."

Im gleichen Sinne äußert sich KIRSCH (1973, S 5):

> "In dieser Lage genügt es nicht, die in der wissenschaftlichen Mathematik üblichen Konstruktionen ... mehr oder weniger tief herunterzutransformieren und dazu nachträglich Veranschaulichungen und Motivationen zu erfinden. Der Zweck dieser Konstruktionen ist es ja, unabhängig von Fragen der Genese und der Anwendbarkeit der erweiterten Zahlenbereiche deren E x i s t e n z in möglichst eleganter und verallgemeinerungsfähiger Form nachzuweisen, wobei strukturelle Gesichtspunkte dominieren."

Diese Stichworte verdeutlichen die Fragen, um die es im weiteren geht: Wie vollzieht sich die Genese des Bruchbegriffs beim Kind, welche Sachsituationen geben zu entsprechenden Begriffsbildungen Anlaß, wie werden diese als neue Werkzeuge des Denkens eingesetzt und angewendet? Die zentralen Probleme für den Mathematikunterricht ergeben sich nicht bei dem Versuch einer sauberen mathematischen Beschreibung der Zugänge, sondern bei den Fragen nach ihrer Natürlichkeit und Reichweite - für das Kind. Grob umrissen, heißt das:

- Die Überlegungen müssen von relevanten und dem Kind zugänglichen Situationen ausgehen, die zur Erweiterung des vorhandenen Begriffsrepertoires herausfordern.
- Die Fortschritte sollen einsichtig sein und auf überschaubaren Wegen zum Ziele führen.
- Die erworbenen kognitiven Mittel müssen in möglichst vielen Situationen weiterhelfen.

Diese Forderungen können gewiß nicht durch innermathematische Konstruktionen allein erfüllt werden.

(2) Überaus klar und mit Nachdruck hat THOM (1973) auf das Mißverständnis hingewiesen, strukturmathematische Beschreibungen brächten bereits Hilfen für das Lernen. Er schreibt:

> "The whole modernist argument rests essentially on the assumption. By making the implicit mechanisms, or techniques, of thought conscious and explicit, one makes these techniques easier." (S. 197).

Und weiter:

> "Certainly, this detachment is a necessary step in the process of mathematical advancement: but the inverse operation, which is the reabsorption of the explicit into the implicit, is no less important, no less necessary." (S. 199).

> "The real problem which confronts mathematics teaching is not that of rigour, but the problem of the development of 'meaning', of the 'existence' of mathematical objects." (S. 202).

Eindringlich warnt THOM (S. 201ff) vor einer vorschnellen und gewaltsamen "Entbindung" von Begriffen - gleichsam mit der "Zange" strukturmathematischer Mittel wie Äquivalenzrelationen - und fordert die "Verankerung der Mathematik in der Wirklichkeit". (S. 204).

> "In good teaching, one introduces new concepts, ideas etc. by using them, one explains their rules of interaction with primitive elements one has assumed to exist, one makes them familiar through handling these rules. It is only later that one will be able to give the abstract definition ..." (S. 200).

(3) Die THOMschen Warnungen müssen uns mißtrauisch machen gegenüber jedem Versuch, Bruchzahlen allzu glatt explizit einzuführen. Sicher verstößt die mathematische Paarklassendefinition in extremer Weise gegen die Forderung

nach einem genetischen Unterricht, die vielfältig und eindringlich erhoben wird. (Vgl. WITTMANN, 1974)

Wie aber ist es mit dem Operatorzugang? Ist er so natürlich, daß er unproblematisch als der Weg akzeptiert werden kann? Gewiß setzt er bei Grundüberlegungen zum Teilen und Vervielfachen an, greift sie auf und hilft, sie weiterzuführen. Er öffnet zwanglos die Tür zur multiplikativen Struktur der Bruchzahlen. Doch steht er bei der Erschließung der additiven und der Ordnungsstruktur schon fast im Wege. Dies ist durchaus nicht erstaunlich, denn ($\mathbb{B}$,+, <) reproduziert nur die Größenbereichsstruktur, von der man ja bei der Gewinnung der Bruchzahlen ausgegangen ist - gleichsam auf höherer Ebene, aber auch mit einer deutlichen Verfremdung. Einfache Überlegungen zu Größen, wie sie in der traditionellen Bruchrechnung im Vordergrund standen, kommen zwar stets wieder ins Spiel, allerdings wird an vielen Stellen zusätzliche Anstrengung notwendig, sie hinter den Operatoren zu entdecken. Ohne Frage sind Operatoren bereits sehr kunstvolle Objekte, zwar als Hochstilisierungen einfacher Überlegungen entstanden, aber doch diesen - und dem kindlichen Denken - am Ende ein gutes Stück entrückt.

Hat man sie einmal, so lassen sich von ihnen aus in der Tat alle Aspekte des Bruchbegriffs erschließen. Die Operatoren werden zur Drehscheibe der Überlegungen.

- Primär sind sie - wie KIRSCH (1973, S. 6) ausführt - "'Zuordner', die als begriffliches Korrelat von Handlungsvorgängen gesehen werden können. Demgegenüber scheint die Auffassung eines Operators (d.h. einer Abbildung) als Klasse von Zahlenpaaren etwas Sekundäres zu sein."
- Der Zustandsaspekt wird ebenfalls zugänglich. Hält man die von verschiedenen Operatoren zu verarbeitende Eingabe fest, so rücken die entstehenden Bruchzustände in den Mittelpunkt.

- Schwieriger wird es bei der Erschließung des Verhältnisaspekts. Damit sie gelingt, ist eine Schwerpunktverlagerung von der Zuordnungsvorschrift auf die erzeugten Zahlen- bzw. Größenpaare notwendig. Die Verhältnisgleichheit stellt sich gerade als die Zugehörigkeit zum gleichen Operator heraus.

- Endlich kommt auch der Aspekt der Gewinnung eines leistungsfähigeren Rechengebildes zum Tragen, der im wesentlichen durch die Tatsache beschrieben werden kann, daß Gleichungen $a \cdot x = b$ $(a,b \in N)$ in $\mathbb{B}$ stets lösbar sind. Zwar beklagt FREUDENTHAL (1973, S. 248) an den Anstrengungen zur Verbesserung des Bruchrechnens:

  "....sie wären lobenswert, wenn sie die Aufmerksamkeit nicht vom wirklichen Problem ablenkten. Wenn sie didaktisch gut sind, sind sie besonders gefährlich, weil sie die wirkliche Lösung hinausschieben ... Die wirkliche heißt für mich: von der Algebra her."

  Auch diese algebraische Komponente kommt im Operatorzugang zu ihrem Recht.

So ist das Operatormodell durchaus geeignet, den Umgang mit Bruchzahlen verständlich zu machen, Rechenregeln zu begründen, die traditionelle Bruch- und Verhältnisrechnung einzufangen. Die verschiedenen Aspekte treten zudem nicht losgelöst voneinander auf und machen Anstrengungen aus ganz verschiedenen Richtungen notwendig, sondern Zustände, Verhältnisse, Teilungsprozesse und Rechenobjekte werden integriert.

Dennoch sind mit der Definition der Bruchzahlen als Operatoren keineswegs alle Probleme gelöst. Die letzten Überlegungen lassen sich so zusammenfassen:
Wenn Operatoren erst einmal zur Verfügung stehen, dann kann man mit ihrer Hilfe zahlreiche Aspekte erschließen.

In dieser implikativen Formulierung wird aber auch deutlich, daß die Kernfrage - insbesondere wenn Begriffsbildung, nicht Begriffsverwendung im Mittelpunkt steht - eben die ist, wie man an diese neuen Werkzeuge des Denkens kommt. Sie sind nicht von vornherein da, sondern müssen geschaffen werden. Wie man sie dann als Drehscheibe für verschiedene Überlegungen nutzt, ist eine weitere Frage; ob sie für manche Zwecke nicht unnötig künstlich sind und so die Arbeit manchmal sogar erschweren, wieder eine andere.

Keineswegs soll das Gesagte so mißverstanden werden, als ob an einer Stelle der Entwicklung Begriffsbildung stattfinden würde und danach nur noch auf der begrifflichen Ebene weitergearbeitet werden könnte. Vielmehr vollzieht sich dieser Prozeß in ständiger Wechselwirkung und Auseinandersetzung mit entsprechenden Situationen. Es ist kaum denkbar, daß man zunächst von einigen Sachsituationen Operatoren abhebt und nun nur noch die Menge dieser neuen Objekte strukturiert, sondern die Begriffsentfaltung schreitet in dem Maße voran, wie es gelingt, zwischen Begriffs- und Sachebene "hin- und herzudenken".

1.3.2 Die Komplexität des Bruchbegriffs und ihre didaktische Erfassung

(1) In jüngster Zeit sind Versuche erkennbar, der Komplexität des Bruch- und Verhältnisbegriffs stärker Rechnung zu tragen und ihr durch offenere Ansätze als dem Operatorzugang gerecht zu werden. (FLOER, 1974, KIRSCH, 1975, SEYFFERTH, 1975) Sehr deutlich ist diese Entwicklung an den beiden in der Reihe "Der Mathematikunterricht" erschienenen Heften zur Bruchrechnung

zu verfolgen. Während das erste dieser Hefte (1970) nur Arbeiten zur Begründung und unterrichtlichen Umsetzung des Operatormodells enthält, wird dieser Aspekt im zweiten Heft (1975) erheblich zurückgenommen. GRIESEL (1975) stellt in seiner Einführung zwar noch einmal die Vorteile der Operatorsicht zusammen, betont aber auch, daß "eine Identifizierung von Bruchoperatoren und Bruchzahlen sachlich nicht vertretbar" ist (S. 5). KIRSCH (1975) schlägt vor, die Frage "Was ist ein Bruch?" ganz auszuklammern.[1)]

> "Die obige 'ontologische' Frage ist es, die alle Schwierigkeiten bei der Begründung der Bruchrechnung hervorruft. Würde man auf ihre Beantwortung verzichten und sich auf den U m g a n g mit den Schreibfiguren $\frac{m}{n}$ beschränken, so entfielen alle Probleme." (S. 10).

Diese Regeln gewinnt KIRSCH für Ordnung und Addition aus den Erfahrungen beim Umgang mit konkreten Brüchen, der wiederum nichts anderes als Arbeit mit Größen ist. Von dieser noch offenen Deutung eines Bruches als Schreibfigur kommt man - nach KIRSCH, S. 10ff - zu den "Rationalisierungen" der traditionellen Methodik ($\frac{m}{n}_{def} = \frac{m}{n}\,E$), der gegenwärtigen Mathematikdidaktik ($\frac{m}{n}_{def} = \left[G \longmapsto \frac{m}{n}\,G\right]$) und der wissenschaftlichen Mathematik ($\frac{m}{n}_{def} = \left\{(k,l) \mid m \cdot l = n \cdot k\right\}$).

---

1) Es scheint, daß Fragen dieser Art auch an vielen anderen Stellen im Mathematikunterricht mehr Probleme als Nutzen gebracht haben. Sie sind weder von besonderem Interesse für Schüler (und fast alle Lehrer), und sehr viel weiter helfen sie auch nicht. Man denke an die Stichworte Zahlen, Terme, Gleichungen u.v.a.

Interessant ist die Definition, die KIRSCH als Ausweg vorschlägt (S. 14):

$$\frac{m}{n} = \left\{ (k,l) \,\middle|\, \frac{k}{l} G = \frac{m}{n} G \text{ für ein } G \right\}.$$

Hier treten Brüche als Klassen von Zahlenpaaren auf, die - als Operatoren umgedeutet - eine Größe (und damit alle Größen) in gleicher Weise verarbeiten. Extensional führt das zu den gleichen Klassen wie die klassische Definition, doch sind in der angegebenen Fassung "Genese und Anwendbarkeit nicht versteckt" (KIRSCH, 1975, S. 14). Diese Variante bietet in der Tat nun die Möglichkeit, einen Bruch je nach Bedarf zu interpretieren. Man kann so den Schwerpunkt auf den Zahlenpaar-, den Verhältnisaspekt, auf Zuordnungen (Operatoraspekt) oder auf die Ergebnisse solcher Zuordnungen (konkrete Bruchrechnung) verlagern.

Noch einen Schritt weiter geht der Vorschlag von SEYFFERTH (1975), Brüche überhaupt nicht zu definieren, sondern als undefinierte Grundbegriffe anzunehmen und nur den Umgang mit ihnen zu regeln. Ausgehend von der Analyse der "natürlichen Sprache", in der Brüche sowohl als "Quasi-Anzahlen" (dreiviertel Stunde) als auch zur Artikulation von Operatoren (drei Viertel der Wohnfläche) auftreten, plädiert SEYFFERTH dafür, diese "Deutungsunschärfe" nicht durch mathematische Fixierungen zu beheben, sondern sie zur Erschließung verschiedener Interpretationen zu nutzen. Dies führt beim Aufbau der Bruchrechnung dazu (SEYFFERTH, 1975, S. 44ff), die Funktion $(a,G) \longrightarrow aG$ ($a \in B$, G beliebige Größe) je nach Kontext und Bedarf in zweifacher Weise zu akzentuieren: Hält man G fest, so ist $a \rightarrow aG$ die "Benennungsabbildung" (vgl. KIRSCH, 1970) mit der Einheit G; betont man dagegen die Abbildung $G \rightarrow aG$ eines Größenbereichs auf sich, so ist dies gerade die durch a gegebene Vervielfachungsabbildung. Die erste Funktion wird zum Aufbau der Addition und der Ordnungsbeziehung, die zweite bei Überle-

gungen zur Multiplikation herangezogen.

(2) Stichworte zur traditionellen Bruchrechendidaktik

Im letzten Abschnitt ist eine erstaunliche Annäherung neuerer Vorschläge an die traditionelle Bruchrechendidaktik sichtbar geworden. Diese Entwicklung macht es keinesfalls notwendig, nun Operatoren wieder zu vergessen, zwingt aber doch zur gründlicheren Diskussion der Komplexität des Bruchbegriffs. Dabei tritt der Dualismus von Zuständen und Zuordnungen unübersehbar zutage, und die Spannung zwischen diesen beiden Aspekten strahlt auf die gesamte unterrichtliche Arbeit aus. Auch dies ist von der älteren Rechenmethodik durchaus gesehen worden. Stellvertretend für viele andere Stellen, die dies belegen,[1] zwei Zitate aus OEHL (1967):

> "Um den Zusammenhang zwischen dem Teil und seinem Ganzen klar zum Ausdruck bringen zu können, soll unterschieden werden zwischen dem, was konkret-anschaulich gegeben ist - das sind die Maßeinheit (das Bezugsganze) und ihre gleich großen Teile (Bruchstücke) - und dem, was begrifflich gemeint ist - das ist das Zueinander (Verhältnis) von Bruchstück und Bezugsganzem. Dieses Zueinander wird in der Bruchzahl begrifflich ausgedrückt. Das wesentliche Merkmal einer Bruchzahl besteht also darin, daß sie die Beziehung eines Teiles zu seinem Bezugsganzen angibt". (S. 129).
>
> "So kann man aus jeder Bruchzahl ein Doppeltes herauslesen: einmal den O p e r a t i o n s w e g, der vom Bezugsganzen aus gegangen werden muß, und dann das Z i e l dieses Weges ..." (S. 130).

---

1) Vgl. etwa BREIDENBACH (1969), KRUCKENBERG (1957), auch MÜLLER/THYEN (1967), die eine Art Bestandsaufnahme der traditionellen Bruchrechnung und ihrer Schwierigkeiten geben.

(3) "Didaktische Phänomenologie" des Verhältnisbegriffs

In diesen Zitaten zeigt sich eine entscheidende Schwierigkeit bei der Entwicklung des Bruchbegriffs. Man stößt eben nicht auf Bruchzahlen - sei es als Paarklassen, als Operatoren oder in sonst einer Form -, sondern zunächst auf Größen und ihre Repräsentanten. Sind nun solche Größenpaare "nach ihrem Verhältnis" zu vergleichen, so kann sich das Kind sicher nicht auf Bruchzahlen stützen - über diese verfügt es ja noch gar nicht. Vielmehr gelangt es erst über den Verhältnisvergleich zu diesen neuen Werkzeugen, die dann natürlich bei vielen Problemen weiterhelfen. Um dieses Zusammenspiel von Verhältnis und Bruchzahl genauer zu analysieren, müssen wir uns zunächst einen Überblick über Lernziele im Umfeld des Verhältnisbegriffs verschaffen. Dies gelingt sicher nicht durch Deduktion aus allgemeinen Lernzielen (vgl. WINTER, 1972) oder dadurch, daß man die mathematischen Inhalte des Themenkreises längs einer Taxonomie von Lernzielen[1] aufschlüsselt und auflistet. Mit diesem Irrtum setzt sich H. FREUDENTHAL (1974) auseinander. An Stelle der vor allem von Testpsychologen in die Diskussion gebrachten Verfahren zur Beschreibung, Klassifikation und Ermittlung von Lernzielen empfiehlt er die "didaktische Phänomenologie eines mathematischen Gebietes".
Er schreibt (S. 730):

> "Lernziele sollen dem Lernprozeß entnommen werden. Dazu muß man imstande sein, Lernprozesse zu beobachten und zu analysieren ... Dies ist etwas Schwieriges, das nirgendwo unterrichtet wird und in keinem Buch steht; niemand sagt einem, worauf man zu achten hat; man muß alles selber erfinden".

---

1) Etwa der von BLOOM und Mitarbeitern (1972) oder verschiedener für den Mathematikunterricht modifizierter Fassungen. Genannt seien WILSON (1971), AVITAL/SHETTLEWOOD (1968).

Dieses Erfinden ist weder durch eine mathematische Analyse noch durch ein Lernzieleinordnungssystem allein ersetzbar.
Versucht man nach dem Vorschlag FREUDENTHALs am Beispiel des Verhältnisbegriffs, relevante Phänomene zu sammeln und didaktisch zu reflektieren, so gelangt man zu einer außerordentlichen Fülle von Lernzielen. (Vgl. FREUDENTHAL, S. 733ff.) Am Anfang steht die noch rein qualitative Verwendung des Begriffs "verhältnismäßig". (Beispiel: Ein Floh kann - verhältnismäßig - höher springen als ein Mensch). Selbst Kinder im Alter von 4 Jahren sind zu solchen Verhältnisüberlegungen bereits in der Lage. Zeigt man ihnen ein Bild, auf dem der Vater einen mittelgroßen Koffer, der kleine Sohn eine Reisetasche trägt, so reagieren sie spontan:"Die Tasche ist für den Kleinen aber sehr schwer". Die - verhältnismäßig - große Last ruft in vielen Fällen geradezu Entrüstung über das ungerechte Verhältnis hervor. Diesem qualitativen Vorfeld kommt zweifellos auch erhebliche didaktische Bedeutung zu.[1] Verhältnisüberlegungen dieser Art lassen sich leicht quantifizieren. Am einfachsten gelingt dies, wenn sämtliche Größen zu dem gleichen Größenbereich gehören ("interne Verhältnisse"). Als Beispiel: Bei der Betrachtung des nebenstehenden Bildes vergleichen die Kinder von sich aus die Längen der Personen und ihrer Stöcke. Daß der Stock des Kleinen "verhältnismäßig" größer ist, läßt sich sehr einfach daran erkennen, daß er ihm bis zur Schulter reicht, während der des Vaters deutlich darunter bleibt. Sicher müssen Kinder vor solche Situationen gestellt werden, damit sich Proportionsdenken auch in die-

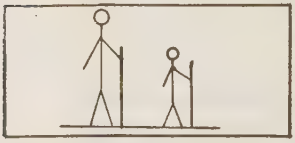


Abb.1.1: Intuitiver Verhältnisvergleich

1) Vgl. WINTER (1969), WINTER/ZIEGLER, Bd. 6 (1970)

ser noch einfachen Art entwickelt. Bei schwierigeren Vergleichen stehen zudem so deutliche Hilfen nicht mehr zur Verfügung, der Aufbau weiterreichender Strategien wird notwendig.
Diese Fortschritte können sich auf unterschiedlichen Wegen vollziehen. In jedem Fall kommen Meßprozesse (ob explizit durch Operatoren erfaßt oder nicht) ins Spiel. Als Beispiel: Beim Vergleich der in Abb. 1.2 vorgegebenen Größenpaare kann man entweder jeweils die kleinere mit der größeren Fläche oder aber zum einen die beiden weißen, zum anderen die beiden schwarzen Flächen vergleichen, um zu Verhältnisaussagen zu gelangen.

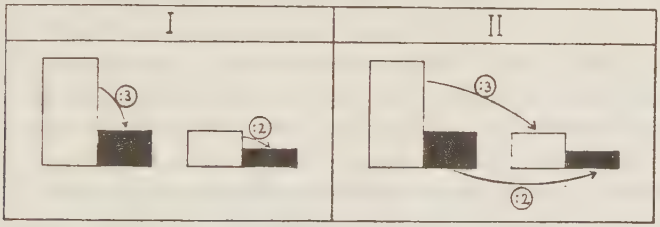


Abb.1.2: Zwei Wege zum Verhältnisvergleich

- Sehr bald kommt man mit natürlichen Multiplikations- und Divisionsoperatoren nicht mehr aus, sondern muß Doppeloperatoren (Bruchoperatoren) heranziehen. Diese Brüche werden, wenn sie einmal verfügbar sind, zu den Standardwerkzeugen zur Bewältigung von Verhältnissituationen.
- Wichtig bei dieser Entwicklung ist, daß der Begriff der Verhältnisgleichheit ursprünglicher ist als der Begriff Verhältnis. Darauf weist auch FREUDENTHAL (1974, S. 733) hin. Das Kind wird zunächst bei einfachen Größenpaaren Verhältnisgleichheit bzw. -ungleichheit erkennen, erst später Verhältnisse als

Größenpaarklassen extensional erfassen können. Eine entsprechende Aussage gilt auch für viele andere mathematische Begriffe.

- Natürlich kann man auch eine Entwicklungslinie in anderer Richtung aufzeigen. Im Vorangegangenen haben wir einen Weg skizziert, der von Verhältnisüberlegungen ausgehend zu Brüchen führt. Auf der anderen Seite erkennt und beschreibt das Kind schon in sehr frühem Alter einfache Teilungsprozesse und deren Ergebnisse ("ein halber Apfel", "eine Viertelstunde", ...). Dabei bleibt es jedoch noch stark an vorgegebene Objekte oder Größen gebunden (wie ja auch die traditionelle Bruchrechnung sich über weite Strecken nicht von einer ausgezeichneten "Einheitsgröße" lösen konnte). Erst wenn es gelingt, verschiedene Größenpaare, die zum gleichen Teilungsprozeß gehören, zu erfassen, kommt die Verhältnisgleichheit ins Spiel. Formalisiert man diese Überlegungen im Operatormodell für Bruchzahlen, dann sind Verhältnisse Paare zusammengehöriger Ein- und Ausgaben eines Bruchoperators.

- Am Ende der Begriffsentwicklung kommt es zu einer Integration der unterschiedlichen Aspekte. Je weiter man zu den Wurzeln zurückgeht, desto deutlicher wird die Eigenständigkeit der Überlegungen. Die verschiedenen Komponenten des Denkens wachsen jedoch nicht isoliert voneinander, sondern werden immer stärker miteinander verwoben und verschmelzen schließlich weitgehend. Für unsere späteren Untersuchungen halten wir fest: Geht man der Begriffsgenese nach, so kann man nicht erst an einer Stelle ansetzen, an der diese Prozesse bereits stattgefunden haben oder doch ein gutes Stück vorangekommen sind. Ebenso wichtig sind Informationen über die frühen Phasen der Entwicklung.

1.3.3 Verhältnisvergleiche im Vorfeld des Operatordenkens

(1) Die Ergebnisse der letzten Abschnitte regen zu weiteren Überlegungen zur Genese des Verhältnisdenkens an. Dabei werden Zahlen- und Größenpaare noch stärker in den Vordergrund rücken, Operatoren kommen erst später ins Spiel. Wenn KIRSCH (1973, S. 6) feststellt, daß "die Auffassung eines Operators (d.h. einer Abbildung) als Klasse von Zahlenpaaren etwas Sekundäres zu sein" scheint, daß primär dagegen der Zuordnungsaspekt ist, so ist damit zweifellos der grundlegende Leitgedanke für den gesamten Aufbau der Bruchrechnung formuliert. Doch zunächst einmal findet das Kind nicht Handlungsvorgänge oder gar Operatoren als deren "begriffliches Korrelat" (KIRSCH, S. 6) vor, sondern Zahlen und Größen als die Objekte, mit denen es sinnvoll umzugehen gilt.

Im einfachsten Fall besteht das Problem darin, zwei Zahlenpaare (a,b) und (c,d) auf Verhältnisgleichheit zu untersuchen. Hier hilft weder die Produktdefinition ("a·d = b·c") weiter, noch stehen Operatoren zur Verfügung. Auch die von KIRSCH (1975) vorgeschlagene Umdeutung der Zahlenpaare zu Operatoren wäre an dieser Stelle künstlich.
Einen natürlicheren Zugang zur Verhältnisgleichheit[1] findet man bereits im Buch VII des EUKLID. Wir stützen uns im folgenden auf einen Vorschlag von MALMENDIER (1975) zur Axiomatisierung der EUKLIDschen Proportionenlehre.
Zunächst ein Beispiel zur Illustration. Was haben die Zahlenpaare (14,21) und (10,15) gemeinsam? Gibt es eine Verwandtschaft zwischen ihnen? Offensichtlich die, daß sich beide Paare "in gleicher Weise erzeugen" lassen. Man sucht den größten gemeinsamen Teiler von 14 und 21 einerseits, von 10 und 15 andererseits.

---

1) Eine eingehende Diskussion didaktischer Fragen zum Verhältnisbegriff findet man bei MITSCHKA (1971) und WINTER (1969).

Genau so wie man nun 14 und 21 aus 7 erhalten kann, so auch 10 und 15 aus 5. Oder: 7 ist derselbe Teil von 14 wie 5 von 10 und 7 ist derselbe Teil von 21 wie 5 von 15. Die Vervielfachungsprozesse (hier das Verdoppeln und Verdreifachen) bleiben dabei allerdings noch im Hintergrund. Grundlegender dagegen sind die Meßvorgänge, insbesondere die Einsicht: Mißt man beide Zahlenpaare geschickt aus (Abb. 1.3) und sieht von der Größe des Maßes ab, so erkennt man, daß die beiden Zahlenpaare zueinander "passen". (Die Analogie kann auf verschiedene Weise modelliert werden.)

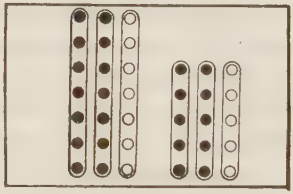


Abb.1.3: Verhältnisvergleich durch "Ausmessen"

Diese Überlegungen lassen sich leicht formalisieren. (Vgl. MALMENDIER, 1975.) Ausgangspunkt ist die Relation D ("derselbe Teil von"):

$$(a,b)\ D\ (c,d) \Longleftrightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{N}} a \cdot k = b \wedge c \cdot k = d.$$

Damit allerdings kann man nur in günstigen Fällen die Verhältnisgleichheit feststellen. Im allgemeinen braucht man eine umfassendere Relation (dMT: "dieselbe Menge von Teilen"):

$$(a,b)\ dMT\ (c,d) \Longleftrightarrow \bigvee_{f,g} (f,a)\ D\ (g,c) \wedge (f,b)\ D\ (g,d).$$

Die so definierte Relation dMT ist eine Äquivalenzrelation. Man zeigt leicht, daß Zahlenpaare (a,b) und (c,d) genau dann in dieser Relation stehen, wenn $a \cdot d = b \cdot c$ ist. Das ist aber nun keine Definition am Ausgangspunkt der Überlegungen, sondern ein bemerkenswertes Ergebnis. Wichtiger ist für uns, daß der Weg zu dieser Relation auf Erfahrungen des Lernenden aufbaut. Er folgt dem Weg des Denkens in Verhältnissituationen. (Vgl. auch WINTER/ ZIEGLER Bd. 6, 1970, MITSCHKA, 1971.)

Natürlich sind die so erzeugten Klassen noch keine Rechenobjekte, keine Bruchzahlen. Hier geht es zunächst

einmal darum, diese neuen Objekte sinnvoll zu bilden, ein nächster Schritt wird sein, in diesem neu erschlossenen Feld Ordnung zu schaffen. Dann erst kann man das Problem angehen, ob und wie man mit solchen Paaren rechnen kann.

Zwanglos kommt man von der Relation dMT zur Operatorsicht. Durch einfache Umformungen erhält man:

$$(a,b)\ dMT\ (c,d) \Longleftrightarrow \bigvee_{k,j}\ a = k\cdot\frac{b}{j} \wedge c = k\cdot\frac{d}{j}.$$

In unserem Beispiel heißt dies: Man erhält 14 aus 21 genauso wie 10 aus 15, indem man nämlich jeweils das Doppelte des dritten Teiles nimmt: $14 = 2\cdot(\frac{1}{3}\cdot 21)$, $10 = 2\cdot(\frac{1}{3}\cdot 15)$. Allerdings sieht man deutlich, daß hier die Operatoren erst im Nachhinein ins Spiel kommen, es sind durchaus nicht die "umgedeuteten" Ausgangszahlen.

(2) Noch ein weiterer Zugang zur Verhältnisgleichheit soll kurz erwähnt werden.
In unserem Problem des Vergleichs von (14,21) und (10,15) kann man die "Äquivalenz" leicht daran erkennen, daß beide Paare aus dem gleichen "Grundpaar" aufgebaut werden können (Abb. 1.4), nämlich aus (2,3). Durch "Verfünffachen" erhält man daraus (10,15), durch "Versiebenfachen" (14,21). Definiert man $n \times (a,b) = (na, nb)$, so läßt sich die Äquivalenz von Paaren als "Baugleichheit" formulieren: Es gibt ein Paar (k,j), aus dem (a,b) und (c,d) durch "Erweitern" herstellbar sind.

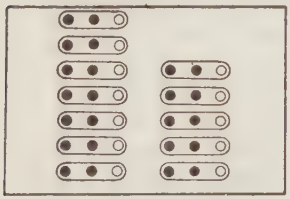


Abb.1.4: Verhältnisvergleich durch Aufbau aus einem "Baustein"

$$(a,b)bg\ (c,d) \Longleftrightarrow \bigvee_{k,j,f,g}\ f\times(k,j) = (a,b) \wedge g\times(k,j) = (c,d)$$

Schreibt man dies ausführlich, so sieht man, daß sich diese neue Definition nicht von der im letzten Abschnitt diskutierten unterscheidet. Allerdings haben andere Über-

legungen zu ihr geführt. Auch diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, und es gilt wiederum:

$(a,b)\ bg\ (c,d) \iff ad = bc.$

Es zeigt sich, daß man zwar sehr leicht von links nach rechts, also von der einsichtigen Relation der Baugleichheit zur formalen Produktgleichheit kommt, daß aber der Weg in der anderen Richtung - das ist gerade der Versuch, die formale Fassung mit Sinn zu füllen - erheblich größere Mühe macht.

Notiert man den Beweis "von rechts nach links", stellen sich überraschend viele Einzelschritte als notwendig heraus:

Man wählt $k = ggT\ (a,c), j = ggT\ (b,d)$.

Dann gilt:

$a = f_1 k \wedge c = g_1 k \wedge b = f_2 j \wedge d = g_2 j$,

wobei f_1 und g_1 bzw. f_2 und g_2 teilerfremd sind.

Daraus folgt:

$ad = f_1 g_2 kj$ und $bc = g_1 f_2 kj$.

Da $ad = bc$ ist, gilt: $f_1 g_2 kj = g_1 f_2 kj$, also $f_1 g_2 = g_1 f_2$.

Wegen der erwähnten Teilerfremdheit folgt daraus $f_1 | f_2$ und $f_2 | f_1$, also $f_1 = f_2$ und $g_1 = g_2$.

Wir können daher die Indizes weglassen und erhalten:

$a = fk \wedge b = fj \wedge c = gk \wedge d = gj$, also $(a,b)\ bg\ (c,d)$.

(3) Die vorhergehenden Überlegungen sind nicht als Beitrag zu einer axiomatischen Begründung historischer Bemühungen gedacht, sondern dienen zur Skizzierung von Wegen zum Verhältnisbegriff. Diese Wege sind länger als mathematische Standardkonstruktionen, dafür aber decken sie auch deutlicher die Schwierigkeiten auf, die Kinder zu überwinden haben.

Natürlich sind alle erwähnten Definitionen lediglich verschiedene Fassungen derselben Relation. Jedoch ist die extensionale Sicht des Mathematikers nicht die Sicht

des Kindes. Schon in den Notierungen der Definitionen

$$R_1 : (a,b)\ R_1\ (c,d) \Leftrightarrow ad = bc,$$

$$R_2 : (a,b)\ R_2\ (c,d) \Leftrightarrow (a,b)\ \mathrm{dMT}\ (c,d),$$

$$R_3 : (a,b)\ R_3\ (c,d) \Leftrightarrow \bigvee_{k,j} a = k\cdot(\tfrac{1}{j}b) \wedge c = k\cdot(\tfrac{1}{j}\cdot d),$$

$$R_4 : (a,b)\ R_4\ (c,d) \Leftrightarrow \bigvee_{k,j,f,g} f\times(k,j) = (a,b) \wedge g\times(k,j) = (c,d)$$

erkennt man deutliche Unterschiede. Damit korrespondieren Unterschiede in den zugrundeliegenden Überlegungen. Im Unterricht besteht das Ziel darin, möglichst viele dieser Aspekte zu berücksichtigen und ihre Wechselbeziehungen sichtbar zu machen. In der Tat lassen sich von jedem Zugang her auch die jeweils anderen Grundgedanken erschließen. So etwa kommt man von der Arbeit mit Operatoren ohne Schwierigkeiten zu den Fassungen R_2 und R_3, wenn man Ein- und Ausgaben spalten- bzw. zeilenweise interpretiert. (Allerdings ist dabei nicht die Äquivalenzrelation "wirkungsgleich" für Operatoren zentral, sondern die Relation "gehört zur gleichen Abbildung" in der Menge der Zahlenpaare.)

(4) Formal macht auch die Definition einer Ordnungsrelation für Zahlenpaarklassen keine Mühen:

$$(\overline{a,b}) < (\overline{c,d}) \Longleftrightarrow ad < bc$$

Wieder allerdings ist in dieser formalen Fassung der gesamte semantische Hintergrund verschüttet. In einem genetischen Zugang wird man zunächst einzelne Paare vergleichen. Dies ist besonders einfach, wenn sie in einer der Komponenten übereinstimmen:

(I) $a<b \Rightarrow (a,c)<(b,c)$,

(II) $b<c \Rightarrow (a,b)>(a,c)$.

Mit diesen Vergleichsmöglichkeiten nun kommt man auch bei anderen Zahlenpaaren weiter, wenn man die Äquivalenz als wechselseitige Ersetzbarkeit ausnutzt (und

das ist sehr natürlich). Man gelangt zu diesem Ergebnis:
$(a,b) < (c,d)$ gilt genau dann, wenn es Paare $(a',b') \sim (a,b)$ und $(c',d') \sim (c,d)$ gibt, bei denen $a' < c'$ und $b' = d'$ ist. Zum Beispiel erhält man $(5,9) < (4,6)$, wenn (10,18) und (12,18) als Hilfspaare gewählt werden. (Entsprechend kann man Paare mit gleichen ersten Komponenten heranziehen.)
Von hier aus ist es nicht mehr weit bis zu der Erkenntnis, daß in jedem Fall die Paare (ad, bd) und (bc, bd) weiterhelfen. Dies führt uns gerade wieder zur eingangs notierten Beziehung, die jedoch auch hier nur am Ende der Überlegungen stehen kann, am Anfang ist sie sinnleer.

(5) Was ändert sich, wenn man nicht von Zahlen-, sondern von Größenpaaren ausgeht?
Fordert man für den Größenbereich Kommensurabilität und Teilbarkeitseigenschaft, so ändert sich an dem skizzierten Vorgehen wenig. Zu vorgegebenen Größen gibt es eine "Einheit" E, so daß sich die Größen als natürliche Vielfache von E schreiben lassen. In solchen "bürgerlichen" Größenbereichen kann man dann wie mit Zahlen weiterarbeiten. Insbesondere das Ausmessen einer Größe durch eine andere und die Suche nach dem gemeinsamen Maß zweier Größen bereitet keine Schwierigkeiten. Relationen wie "ist dieselbe Menge von Teilen " sind problemlos zu definieren.

Liegt ein Größenbereich ohne Kommensurabilität vor, so findet man in ihm zumindest einen Unterbereich mit (Koms), wenn man sich auf die rationalen Vielfachen einer Größe beschränkt.
Bewußt haben wir hier die Probleme der Inkommensurabilität herausgehalten. Es ist bezeichnend, daß ja auch die griechische Mathematik mit der Beschränkung auf rationale Probleme lange Zeit durchaus gut zurechtge-

kommen ist. Die "Grundlagenkrise", zu der die Entdeckung der Inkommensurabilität geführt hat, kam erst später. Sicher ist eine solche Erschütterung auch für ältere Schüler fruchtbar, aber zu früh sollte sie doch wohl nicht stattfinden. Zunächst einmal muß man mit den Möglichkeiten des Rationalen vertraut werden, dann erst kann man über seine Grenzen nachdenken.

2. PSYCHOLOGISCHE ASPEKTE DER ENTWICKLUNG DES VERHÄLTNISDENKENS

2.1 Verhältnisdenken und kognitive Entwicklung

2.1.1 Mathematische Analyse und psychologische Aspekte

(1) Auch in die bisherigen Überlegungen sind an zahlreichen Stellen psychologische Anmerkungen eingegangen, da eine mathematische Analyse, die ohne den Blick auf den Lernenden durchgeführt wird, didaktisch kaum sehr weit führen kann. Wenn in diesem Abschnitt dennoch psychologische Aspekte der Entwicklung des Verhältnisdenkens gesammelt werden, so kann dies keineswegs losgelöst von dem Bisherigen gesehen werden, sondern ist eher als Akzentverschiebung zu verstehen.

Am Ende unserer Überlegungen wird gewiß keine Psychologie des Verhältnisdenkens stehen. Wir werden zufrieden sein müssen, wenn es gelingt, einige wesentliche Züge seiner Genese aufzuzeigen und diese in Grundlinien intellektueller Entwicklung einzuordnen.

(2) Im ersten Kapitel sind wir den Fragen nachgegangen, wie man zu mathematischen Begriffen und Objekten kommt, wozu man diese Instrumente braucht, wie weitreichend sie sind, wo sie eingesetzt werden können. Nun geht es darum, wie sich die Begriffsbildungen beim Kinde vollziehen, welche neuen kognitiven Schemata dabei ausgebildet werden müssen, welche Schwierigkeiten zu überwinden sind.

Diese Fragen sind in dem Sinne eigenständig, daß die Beantwortung einer von ihnen die anderen noch durchaus offen läßt. Keineswegs aber sind die Fragen voneinander unabhängig und losgelöst von den jeweils anderen zu beantworten. Einerseits zeigt die mathematische Analyse Ziele und mögliche Wege zu ihnen auf. Sie macht deutlich,

daß bei der Entfaltung des Verhältnisdenkens in jedem Falle neue Objekte konstruiert oder entdeckt werden müssen, seien es Klassen von Größenpaaren, Bruchoperatoren, "nur" neue Punkte auf dem Zahlenstrahl oder - was wohl zutreffender ist - all dies miteinander verwoben. Sie gibt so Hinweise auf erforderliche Abstraktionsprozesse. Die Antwort aber, wie die zugehörigen kognitiven Schemata aufgebaut und in bereits vorhandene integriert werden, fällt dabei jedoch sicher nicht als Nebenprodukt mit ab. Es könnte durchaus sein, daß das Kind formalen mathematischen Konstruktionen Schritt für Schritt folgt, ohne daß eine Ausbildung korrespondierender kognitiver Instrumente stattfindet. Andererseits ist ein nur lernpsychologisch zentrierter Ansatz unzureichend, weil er die Frage nicht beantworten kann, wie sich die erhaltenen Ergebnisse mathematisch und didaktisch einordnen lassen, insbesondere welche Relevanz sie für den Unterricht haben. Wir werden daher versuchen müssen, diese verschiedenen Aspekte gleichzeitig zu berücksichtigen und aufeinander zu beziehen.

Zwar ist SUPPES (1966, S. 145) überzeugt, daß

> "die psychologische Schichtung mathematischer Begriffe selten - wenn überhaupt jemals - die logische Struktur dieser Begriffe verletzen wird, aber sie wird erheblich von der mathematischen Analyse abweichen, was die Fülle zu beachtender Details betrifft".

Dies wirft eine Reihe von Fragen auf: Ist das Verhältnis von psychologischer Schichtung und logischer Struktur wirklich so unproblematisch? Ist die mathematische Analyse hinreichend, um solche Schichtungen und damit ihren Aufbau zu erfassen? Steckt der Teufel vielleicht gerade in den Details?

Zumindest ist es nicht ratsam, die mathematische und die psychologische Entwicklung eines Begriffs einfach zu identifizieren, sondern es gilt, zunächst Informationen über die Psychogenese zu sammeln und dann den möglichen Beitrag der mathematischen Analyse und des Mathematikun-

terrichts zu diesem Prozeß abzuschätzen. Allerdings ist dieses Vorgehen mühsamer als der Weg, der schlicht über die Stationen mathematische Analyse - Elementarisierung - Vermittlung führt, wobei die offenen Fragen nur darin bestehen, ob das Kind am Ende auch mitmacht.

(3) Eine Überschrift "Psychologische Aspekte" schreibt sich leicht, zeigt aber auch bald ihre Schrecken. Jedes psychische Geschehen ist ein Teil einer ungeheuer komplexen, ständig sich verändernden Struktur. Welches sind die entscheidenden Faktoren, die bedeutsamen Randbedingungen? Wie erhält man entsprechende Hinweise? Wo soll man beginnen?
So kann unser Anspruch bestenfalls dahin gehen, einige dieser Aspekte - vielleicht sind die wichtigsten dabei - der kognitiven Entwicklung in Stichworten festzuhalten, in der Hoffnung, so Verbindungen zwischen mathematischer Analyse und psychologischen Theorien - bezogen auf unser Problem - aufzuzeigen und zu ihrer Verzahnung beizutragen.

2.1.2 Begriffslernen: (Zu) einfache Modelle und ihre Grenzen

(1) Eine unübersehbare Fülle psychologischer Arbeiten ist dem Lernen von Begriffen gewidmet. Dennoch liefern sie kaum ein brauchbares Arbeitsgerüst für unsere Überlegungen. Dies hat seinen Grund vor allem darin, daß viele dieser Ansätze bis in die Gegenwart hinein sehr stark in der Reiz-Reaktions-Psychologie verwurzelt sind. Selbst neuere Standardwerke der Pädagogischen Psychologie können sich von diesem Ansatz nur schwer befreien. So beschreibt DE CECCO (1968, S. 388) einen Begriff als "Klasse von Reizen, die gemeinsame Charakteristika haben". Als Beispiel: Das Kind hat den Begriff "Hund" gebildet, wenn es genau auf alle Repräsentanten dieser Gattung in gleicher Weise - sei es sprachlich oder nichtreagiert. Auf einfachen Begriffen aufbauend kommt man dann durch Verfeinerungen und Kombinationen zu konjunkti-

ven, disjunktiven, relationalen Begriffen. Man findet in der Literatur detaillierte Anleitungen zur stufenweisen Vermittlung von Begriffen. Bei DE CECCO etwa sind es acht Stufen, die durch geschickte Darbietung von Beispielen und Gegenbeispielen beschrieben werden. CLARK (1971) erstellt ein differenzierteres und auf den Unterricht bezogenes Modell des Begriffslernens, das sie aus der Diskussion zahlreicher experimenteller Arbeiten gewinnt, ohne jedoch das skizzierte Grundmuster (Beispiele - Gegenbeispiele - Abgrenzung gegen andere Begriffe) zu überwinden. Auch bei GAGNÉ (1969) ist Begriffslernen - als eine Stufe in einer Hierarchie von Lernformen - dadurch charakterisiert, daß der Lernende die Fähigkeit erwirbt, einheitlich auf eine Kollektion von Reizobjekten als Klasse zu reagieren und diese Reaktion über die speziellen, ursprünglich präsenten Klassenglieder hinaus auszudehnen, und ist damit letztlich eine komplexe Form des S-R-Lernens.

H.H. KENDLER (1964) zeigt in einer Arbeit mit dem Titel "The Concept of the Concept" zunächst die Problematik des S-R-Ansatzes auf. Als vorsichtigere Definition übernimmt er von T.S. KENDLER (1961, S. 447):

> "Concept formation is taken to imply the acquisition or utilization, or both, of a common response to dissimilar stimuli. It is the problem of those who study concept formation to analyse the process and determine which variables influence it."

Diese Betonung des "common response to dissimilar stimuli" bringt jedoch für die "Analyse der Prozesse" nur wenig. Nehmen wir als Beispiel eine Situation, die wir später noch eingehender erörtern werden:
Das jüngere Kind hält beim Vergleich von Spielfeldern diejenigen für gleich gut, die gleich große schwarze Flächen aufweisen. Es hat damit einen gewiß fundamentalen Begriff, den des Flächeninhaltes, gebildet. Aber wie kommt es nun zum Verhältnisbegriff? KENDLER selbst weist

darauf hin, daß die angeführte Definition komplexeren Begriffen, wie sie etwa PIAGET untersucht, nicht gerecht wird (Raum, Zeit, Kausalität). Doch welcher Ausweg bietet sich an?

Um die einfachen Reiz-Reaktions-Kopplungen zu überwinden, betont OERTER (1971, S. 19),

> "daß jemand, der Begriffe besitzt und verwendet, Klassifikationsregeln gefunden hat, die er auf Eindrücke verschiedenster Art anwenden kann. Zwischen Eingabe (Reiz) und Antwortverhalten müssen also vermittelnde Prozesse treten, die eigentlich den Begriff ausmachen. Der Begriff wäre demnach am einfachsten als Regel oder System von Regeln zu umschreiben, mit deren Hilfe Ereignisse (Eindrücke, Reize, Erlebnisse) klassifiziert werden."

Die OERTERsche Umschreibung macht zunächst einmal deutlich, welche Rolle Regeln bei der Begriffsbildung spielen. Zwischen Reiz und Reaktion werden vermittelnde Prozesse eingeschaltet, die auch neue didaktische Perspektiven eröffnen. Man sieht zumindest Drehpunkte, an denen man den Hebel ansetzen könnte, wenn es um Begriffserwerb geht: Das Kind lernt in dem Maße Begriffe, wie es Regeln aufbaut, versteht, koordiniert. Der so entstehenden Hierarchie von Regeln entspricht eine Erweiterung des Begriffsgefüges und -umfangs.

(2) Angesichts der kurzen Bestandsaufnahme kann es nicht verwundern, wenn WEINERT (1974, S. 667) in einer Zusammenstellung wichtiger Ergebnisse zum Stichwort Begriffslernen bedauert:

> "Leider weiß man über diese komplizierten Vorgänge wissenschaftlich gesehen bisher noch recht wenig."

Doch wollen wir auch KENDLERs (1964, S. 233) Ermutigung wiedergeben:

> "It is easy to get depressed about the current status of our knowledge of conceptual behavior.

> We know so little. We have so much to learn. Yet depression.or even disappointment, is not justified."

Daß allzu einfache Klärungsversuche nicht ausreichen, wird in vielen neueren Arbeiten deutlich. So stellen NEIMARK/SANTA (1975) in ihrem Beitrag "Thinking and Concept Attainment" im "Annual Review of Psychology" fest:

> "The theoretical framework underlying research on thinking has shifted over the years. There is now very little work explicitly inspired by Gestalt theory ....Even work with an S-R-learning orientation has declined ....Most recent work takes its theoretical impetus from developments outside the traditional rubric. One major influence derives from the genetic epistemelogy of J. Piaget." (S. 173/174)

Auf die damit angesprochenen Überlegungen gehen wir etwas weiter unten ein.

Aus dem Bisherigen erhalten wir zwar kaum Antworten, es hilft uns jedoch, Fragen genauer zu stellen. Selbstverständlich ist mit jeder Begriffsbildung eine Klassenbildung verbunden. (Dabei nehmen die verschiedenen Typen kaum Sonderrollen ein.Extensional passen konjunktive und disjunktive Begriffe zu Schnitt- bzw. Vereinigungsmengen; relationale Begriffe korrespondieren mit Paarmengen - jede Relation auf einer Menge M ist mathematisch einfach als Teilmenge von M x M beschreibbar.) Schwierig wird es bei der Analyse der kognitiven Vorgänge bei Begriffsbildungsprozessen. Geht es wirklich nur darum, gemeinsame Reize zu erkennen? Was ist, wenn solche Reize gar nicht erkennbar sind? Braucht man nicht in vielen Fällen tiefer liegende Strategien, um zu Begriffen zu kommen? Oder läßt sich Begriffsbildung überhaupt nur angemessen in umfassenderen (etwa PIAGETschen) Modellen beschreiben?

Selbst wenn man an der einfachen - und möglicherweise nützlichen - Vorstellung der Klassenbildung festhält, sind damit die wesentlichen Fragen noch offen:

Wie baut das Kind denn diese Klassen auf? Mit einem Schlage - oder nach und nach? Mit welchen Störungen und Irrwegen muß es fertig werden?
Fragen dieser Art können wir weder hier noch in den folgenden Kapiteln endgültig beantworten. Stattdessen wollen wir versuchen, sie am Beispiel des Bruch- bzw. Verhältnisbegriffs zunächst theoretisch zu erörtern und ein wenig zu klären. Weitere Aufschlüsse erhoffen wir von unseren Interviews und Tests.

(3) Statt uns an der Frage nach dem Wesen des Begriffs festzuklammern, wollen wir am Beispiel des Verhältnisbegriffs einiges von dem beschreiben, was beim Begriffserwerb vor sich geht. Diese Verlagerung des erkenntnisleitenden Interesses ist keine Resignation, sondern erfolgt in der Hoffnung, den zentralen didaktischen Problemen näherzukommen.

Wir gehen von einer Situation aus, die auch im folgenden noch häufig herangezogen werden wird, wenn es um Verhältnisvergleich geht. Was wird von Kindern verlangt, wenn sie - etwa bei der Einschätzung der "Güte" von Spielfeldern - Aussagen über die Verhältnisse der Flächeninhalte der Gesamtfelder und der gefärbten Teile gewinnen wollen?

- Sind die Gesamtflächen kongruent, so genügt der Vergleich der gefärbten Flächen. Das Problem wird auf Größenvergleiche reduziert.
- Sind ähnliche Spielfelder mit gleichartigen Aufteilungen vorgegeben (etwa Kreise, Quadrate), so kann ein "Gestaltvergleich" durchaus weiterführen. Dies sind auch die Fälle, in denen Reiz-Reaktions-Muster wohl noch ausreichend sind. Ein Kind, dem man eine genügende Anzahl von Beispielen und Gegenbeispielen vorlegt, wird am Ende zu Begriffen wie "die Hälfte", "Viertelkreis" u.a. kommen.
- In dem Maße jedoch, in dem diese Wahrnehmungshilfen fortfallen, versagen die einfachen Begriffsbildungs-

schemata. Es werden vielmehr Regeln und Regelsysteme notwendig, mit deren Hilfe sich Verhältnisvergleiche durchführen lassen. Welche Regeln weiterhelfen, hängt entscheidend von dem gewählten Zugang und den jeweils relevanten Aspekten des Bruch- bzw. Verhältnisbegriffs ab. Eine Auswahl haben wir in Kap. 1 skizziert.

Am Ende der Entwicklung stehen natürlich Klassen von Zahlen- oder Größenpaaren, die mit einer sinnvollen Ordnungsrelation versehen sind. Diese mathematische Beschreibung des Endproduktes korrespondiert in gewisser Weise mit dem, was psychologisch durch den Hinweis auf "identische Reaktion auf Klassen von Objekten" erfaßt werden soll. Allerdings scheinen Feststellungen dieser Art nur für Zwecke der Testkonstruktion bedeutsam, Auskunft über Begriffsbildungsprozesse liefern sie kaum. Nach geglückter Begriffsbildung soll das Kind in der Lage sein, etwa ein 4-von-6- und ein 6-von-9-Feld als gleich gut zu erkennen. Wie es zu dieser Einsicht kommt, ist jedoch eine völlig andere Frage.

Sieht man auf den Weg, nicht (nur) auf das Ziel, so sind die Vorgänge zweifellos erheblich komplizierter. Das Kind baut ein ständig wachsendes und dichteres Geflecht von Regeln auf, mal tritt dieser Aspekt in den Vordergrund, mal jener, verschiedene Einsichten werden integriert und in Wechselwirkung gebracht. Allmählich werden, aufbauend auf schon Vorhandenem, Möglichkeiten für den sinnvollen Umgang mit Verhältnissen, Anteilen, Bruchzahlen entwickelt. Am Ende schließlich führt dies zur Konstruktion von neuen Objekten, die als Bestandteile des intellektuellen Instrumentariums verfügbar sind.

Es scheint, daß diese Genese durchaus angemessen von der o.a. OERTERschen Umschreibung von Begriffsbildung gekennzeichnet wird, bei der Regeln als "vermittelnde Prozesse" eine zentrale Rolle spielen. Dieser Defini-

tionsversuch ist weitgehend unabhängig von einem bestimmten theoretischen Ausgangspunkt. Er läßt auch die Frage offen, welche Rolle die Sprache beim Begriffserwerb spielt. Gewiß wird Sprache dabei eingesetzt und kann Stützfunktionen für das Denken übernehmen, doch wäre es gefährlich, ihre Bedeutung zu überschätzen. Unterrichtliche Anstrengungen lassen sich in diesem Konzept als gezielte Hilfen beim Aufbau begriffserzeugender Regeln deuten. Bemühungen dieser Art stehen im Mittelpunkt des Versuches, den wir in Kap.4 schildern werden.

(4) An dieser Stelle fügt sich auch das GAGNÉsche Modell hierarchisch aufgebauter Lernformen in unsere Analyse des Begriffslernens ein, wenn man den Akzent von der an der Oberfläche bleibenden Beschreibung des Endverhaltens auf das Zusammenspiel von Begriffs- und Regellernen bei der Konstituierung von Erkenntnis verschiebt. Das Lernen verläuft dann nicht schlicht kumulativ (zuerst ein genügend großer Vorrat an sicher beherrschten Begriffen, dann Regeln, die mit ihrer Hilfe gebildet werden), sondern vollzieht sich in ständiger Wechselwirkung. Zwar sind Begriffe in gewissem Sinne Bausteine für Regeln, doch nicht als festgeformte Steine, aus denen es dann nur noch Mauern zu bauen gilt. Sie selbst werden im Gebrauch verändert, abgeschliffen, eingepaßt. Das Grundmuster sieht dann so aus: Das Kind lernt zunächst Begriffe "erster Stufe" (etwa Anzahl, Länge, Flächeninhalt) und Regeln für den Umgang mit diesen Begriffen (etwa für Vergleich, Addition, Vervielfachung von Größen). Darauf aufbauend - teils mit zeitlichen Überlappungen - erwirbt es (wiederum über adäquate Regeln) Begriffe wie Verhältnis, Anteil, Bruch. Es ist selbstverständlich, daß man das zugrundeliegende kognitive Geschehen nicht verstehen kann, wenn man das lernende Kind dabei nur als eine black box sieht, die Reize aufnimmt und Reaktionen abgibt. Richtiger (und mensch-

licher) ist es, davon auszugehen, daß das Kind, beginnend bei noch sehr intuitiven Vorstellungen seine Umwelt immer besser zu verstehen sucht und dabei - hier schneller, dort langsamer, mal außerordentlich zielstrebig, dann wieder auf scheinbar unnötigen Umwegen - neue Möglichkeiten entdeckt. Beispiele von Lernstrukturen gibt GAGNÉ selbst an zahlreichen Stellen an. (Vgl. etwa GAGNÉ, 1968) In einer vor kurzem erschienenen Arbeit ist NOVILLIS (1976) der Frage nachgegangen, welche "subconcepts" dem "fraction concept" zugrundeliegen. Entsprechend den Vorschlägen von GAGNÉ (1965) und GAGNÉ/MAYOR/GARSTENS/PARADISE (1962) hat sie eine Lernhierarchie aufgebaut. Das Fazit der Untersuchung:

> "...the main conclusion reached was that certain subconcepts were prerequisite to others."

Allerdings wirft dieses Ergebnis nur wenig Licht auf die Begriffsbildungsprozesse.

2.1.3 Verhältnisdenken und BRUNERs Theorie der Repräsentationsformen des Wissens

(1) Offen geblieben sind im Vorhergehenden vor allem zwei Probleme: Was macht dem Kind die bei der Bildung des Verhältnisbegriffs notwendige Loslösung von Größen so schwer? Welche kognitiven Schemata müssen auf diesem Weg entwickelt werden? Die erste Frage lenkt die Aufmerksamkeit auf einige der Ideen BRUNERs, die zweite auf PIAGETs genetische Epistemologie.

BRUNERs Theorie der intellektuellen Entwicklung (BRUNER, 1964, 1966, 1970, BRUNER/OLVER/GREENFIELD, 1971) hat sich in den letzten Jahren wie kaum ein anderer Beitrag der Psychologie für mathematikdidaktische Fragen ergiebig erwiesen. Sie ist an so zahlreichen Stellen unter didaktischen Aspekten dargestellt, analysiert und in Prinzipien umgemünzt worden (WITTMANN, 1974), daß sie zu

didaktischem Allgemeingut geworden ist und hier nicht erneut ausgebreitet werden muß. Was uns interessiert ist, inwieweit sich unsere Frage nach der Entwicklung des Verhältnisdenkens in den Rahmen der BRUNERschen Theorie einordnen läßt und ob sich möglicherweise von ihr her Antworten abzeichnen. In der Tat deckt der Ansatz BRUNERs vieles von der Problematik der Bruchbegriffsentwicklung auf. Die mathematische Analyse im vorangehenden Kapitel hat gezeigt, daß in jedem Zugang zu Bruch- bzw. Verhältniszahlen erhebliche Abstraktionsleistungen erforderlich sind, die von Größen zu neuen Objekten führen. Während man Größen, speziell natürliche Zahlen, noch einfach vergleichen kann durch (geschickte) Inspektion der Repräsentanten, ist nun ein deutlicher Schritt vorwärts notwendig. BRUNER (1971, S. 51) betont, daß zahlreiche Arbeiten bestätigen,

> "daß Kinder bis zu einem Alter von 8 und 9 Jahren anschauliche Züge als Grundlage für die Gruppierung von Objekten vorziehen. Sie weisen darauf hin, daß unschematisierte Vorstellungsbilder die frühen intellektuellen Operationen kennzeichnen. Sie sind die Vorgänger eigentlich 'logischer' Operationen, die sie unter gewissen Umständen sogar zu stören vermögen."

Dieses Zitat illustriert den Ausgangspunkt auf dem Weg zum Verhältnisbegriff recht gut. Dem jüngeren Kind gelingt es noch nicht, sich von diesen "Vorstellungsbildern" (Längen- und Flächenvergleich) zu lösen. Unsere Interviews (in Kap. 3) werden zeigen, welche Anstrengung dazu notwendig ist. Wie aber stellen sich Fortschritte ein? Notwendige Voraussetzung ist sicherlich, daß das Kind

> "davon loskommt, nur einen einzigen wahrnehmungsmäßigen Aspekt der Dinge zu beachten, und nunmehr durch die gleichzeitige Beachtung mehrerer Dimensionen, die in einer strukturierten Beziehung gesehen werden, invariante Züge derselben erkennt." (BRUNER, 1971, S. 15)

> "Intellectual development is marked by increasing capacity to deal with several alternatives simultaneously ... There is a great distance indeed between the one-track mind of the young child and the ten-year-old's ability to deal with an extraordinarily complex world." (BRUNER, 1966, S. 6).

Um dieses "Einspur-Denken" zu überwinden, entwickelt das Kind zunehmend anspruchsvollere Mittel. Es wird fähig, in verschiedenen Richtungen zu denken, integriert Einzelkenntnisse, entdeckt neue Repräsentationssysteme. Von noch ungenauen Vorbegriffen ausgehend, findet ein permanenter Prozeß der Präzisierung und Erweiterung statt. Das Kind lernt, die Begriffe sicherer zu gebrauchen und aus einfachen Begriffen leistungsfähigere zu bilden. (Die komplexen Strategien, die zum Erwerb von konjunktiven und disjunktiven Begriffen notwendig sind, haben BRUNER/AUSTIN/GOODNOW, 1956, in einer bekannten Studie untersucht.)

Im Verlauf dieser Entwicklung gelingt es dem Kind, auch symbolische Darstellungsformen zu verstehen und einzusetzen und sich so von der Bindung an Handlungen und Bilder zu befreien. Insbesondere die Sprache erweist sich als hilfreiches Instrument. Allerdings darf daraus kein Primat der Sprache abgeleitet werden. BRUNER (1971, S. 78) weist darauf hin,

> "daß die Erfahrung und die Operationen des Denkens auf eine Weise vorbereitet werden müssen, bevor die Sprache eingesetzt werden kann." Dann
> "können höhere Ebenen durch die Verwendung der Sprache als Instrument erstiegen werden."

Bis dahin aber

> "bewahren Sprache und Erfahrungen eine ausgeprägte Unabhängigkeit voneinander."

(2) So außerordentlich die Fortschritte sind, die Kinder in den ersten acht bis neun Lebensjahren auf diesem Wege machen, so auffallend ist jedoch ihre Hilflosigkeit

in Verhältnissituationen. Dies zeigen die im nächsten Abschnitt erörterten vorliegenden Arbeiten und wird durch unsere eigenen Untersuchungen bestätigt werden. Eine Vielzahl "einfacherer" kognitiver Instrumente werden bis zu sehr leistungsfähigen Formen entwickelt: Anzahl-, Längen-, Flächeninhaltsbegriffe, Vergleichs- und Meßverfahren, Teilungs- und Vervielfachungsprozesse. Die Koordination dieser Fähigkeiten jedoch, die zur Konstituierung des Verhältnisdenkens notwendig wäre, gelingt in den meisten Fällen nicht. Es scheint, als ob dazu ein qualitativ höheres Denkniveau erreicht werden müßte. Während alle genannten Fähigkeiten im wesentlichen auf enaktiv-ikonischem Boden wachsen können, verlangen Verhältnisüberlegungen den Schritt über das ikonisch Repräsentierbare hinaus. Es geht, wie BRUNER/KENNEY (1971, S. 207) in einer im nächsten Abschnitt ausführlicher diskutierten Arbeit formulieren, um

> "Begriffe, die gemäß ihrem Wesen keine wahrnehmbaren Züge bezeichnen, auf die man hinzeigen kann, mindestens nicht, indem man auf einen einzigen hinzeigt."

In der Tat korrespondiert diese Feststellung mit den Ergebnissen der mathematischen Analyse. Welchen Zugang zu Bruchzahlen und Verhältnissen man auch wählt, immer sind erheblich komplexere Leistungen notwendig, als solche, bei denen man mit "Hinzeigen" auskommt. Dies ist der Fall bei der Erfassung der Anteile und dem Einsatz von Bruchoperatoren ebenso wie beim Aufbau von Klassen gleichwertiger Größenpaare. Bilder können jeweils einige Aspekte festhalten, die Überlegungen stützen und den Fortschritt erleichtern, doch die entscheidenden Entdeckungen liegen gleichsam hinter diesen Bildern.

2.1.4 Verhältnisdenken und PIAGETs Theorie der kognitiven Entwicklung

2.1.4.1 Grundgedanken

(1) Überlegungen zu Fragen der kognitiven Entwicklung führen fast zwangsläufig zur Theorie PIAGETs. Zwar ist sein Grundansatz epistemologisch, nicht lernpsychologisch oder gar didaktisch - dies darf im weiteren nicht übersehen werden und kann vor übertriebenen Erwartungen schützen -, doch stellt das Werk PIAGETs zweifellos den am weitesten ausgearbeiteten Versuch dar, die Prozesse der (kognitiven) Entwicklung aufzudecken. In einer Fülle von Arbeiten haben er, seine Mitarbeiter und viele andere die Auseinandersetzung des Kindes mit seiner Umwelt beschrieben. Es geht dabei nicht darum, Verhaltensformen zu erfassen, die von Personen in bestimmtem Alter zu erwarten sind, sondern zu klären, was sich hinter dieser Oberfläche abspielt. Auf diese Weise kommt man in der Tat zu sehr viel tiefer liegenden Einsichten in Begriffsbildungsprozesse, als dies in einer Reiz-Reaktions-Sicht möglich ist. Auch bei PIAGET klingt diese Sicht zwar an, wenn er in der "Psychologie der Intelligenz" schreibt:

> "Der Begriff einer Klasse ist psychologisch nichts anderes als der Ausdruck der identischen Reaktion des Subjekts gegenüber den Gegenständen, die er in einer Klasse vereinigt; logisch drückt sich diese Assimilation in der qualitativen Äquivalenz aller Elemente einer Klasse aus." (PIAGET, 1947, S. 40).

Dieser Satz aber kennzeichnet zunächst nur das Ziel des Entwicklungs- bzw. Lernprozesses. Die eigentliche Arbeit beginnt bei der Klärung der Fragen, auf welchen Wegen das Kind zu diesem Ziel kommt, welche kognitiven Operationen und Schemata es aufbauen muß, welche Stadien es dabei durchläuft u.v.a.m.

(2) Es ist selbstverständlich unmöglich, die Grundzüge der PIAGETschen Theorie auf wenigen Seiten abzuhandeln. Entsprechende Darstellungen liegen in großer Zahl vor. Erwähnt seien PIAGET (1974, 1970), FLAVELL (1963), GINSBURG/OPPER (1975), speziell für Lehrer aufbereitet sind die Arbeiten von FURTH (1973) und - mit besonderem Blick auf Mathematikunterricht - STEINER (1973) und WITTMANN (1974).
Wir wollen versuchen, hier einige der Grundlinien zu skizzieren, die im weiteren bei der Frage nach der Genese des Bruchbegriffs wichtig sein könnten.

PIAGET sieht in der Entwicklung des Individuums einen permanenten Interaktionsprozeß mit der Umwelt. Der Mensch bildet motorische und kognitive Schemata, mit deren Hilfe er "die Wirklichkeit" handelnd und denkend zu erfassen versucht. Dieser Adaptionsprozeß hat zwei Aspekte, den der Assimilation (neue Phänomene werden in die jeweils ausgebildeten Schemata eingepaßt und so verarbeitet) und den der Akkomodation (der Mensch entwickelt neue leistungsfähigere Schemata, mit denen er Herausforderungen von außen begegnet). Ziel und zugleich Antrieb der Entwicklung ist die Schaffung eines stabilen Gleichgewichts zwischen den Möglichkeiten, die zur Verfügung stehen, und den Ansprüchen, die gestellt werden.

Die Entwicklung geht von Handlungen aus, die zunächst konkret mit Objekten durchgeführt, dann fortschreitend "verinnerlicht" zu "Operationen" werden. Diese wiederum werden in zunehmend komplexeren Operationssystemen organisiert, die PIAGET Gruppierungen nennt und deren Struktur durch Kompositionsfähigkeit, Assoziativität und Reversibilität gekennzeichnet ist. (Eine ausführliche Diskussion dieser Gruppierungen findet man bei BETH/PIAGET, 1961, und FLAVELL, 1963. Eine mathematische Formalisierung des Gruppierungsbegriffs, die das Wechsel-

spiel von Zuständen und Übergängen zwischen ihnen adäquat erfaßt, liefert WITTMANN, 1973.)

Das Kind durchläuft in seiner Entwicklung verschiedene "Stadien", für die PIAGET jeweils typische kognitive Möglichkeiten angibt.
Er unterscheidet (nach FLAVELL, 1963, S. 86ff):

sensomotorisches Stadium:		bis	$1\frac{1}{2}$ Jahre,
präoperatives Stadium:	$1\frac{1}{2}$	bis	7 Jahre,
konkret-operatives Stadium:	7	bis	11/12 Jahre,
formal-operatives Stadium:		ab	11/12 Jahre.

Die Altersangaben sollten nur als grobe Anhaltspunkte interpretiert werden. Wesentlicher ist, daß jedes Stadium auf dem vorhergehenden aufbaut, die Sequenz ist damit für jedes Kind die gleiche.
Im Verlaufe der Entwicklung findet eine zunehmende Erweiterung der kognitiven Möglichkeiten statt, die Schemata werden flexibler, das Kind wird immer stärker fähig, sich von dem konkret oder bildlich Vorgegebenen zu lösen. Es kommt zur Ausbildung "kognitiver Konstanten" (SINCLAIR, 1971, S. 3). Im ersten Stadium sind es die Objekte, die ihre Identität auch bei räumlichen und zeitlichen Veränderungen bewahren, bis zum Ende des Stadiums der konkreten Operationen gelingt die Erfassung von Größen.

> "Es werden eine Reihe fundamentaler logischer und infralogischer Gruppierungen ausgebildet, in deren Gefolge es zur Konstitution fundamentaler mathematischer und physikalischer Begriffe kommt: logische Verknüpfungen ...., logische Relationen ..., Zahl-, Zeit-, Längen-, Flächeninhalts- und Volumenbegriffe, Begriffe der Masse und des Gewichts, asymmetrische Relationen." (WITTMANN, 1974, S. 56)

Diese Prozesse, die sich schwerpunktmäßig im Grundschulalter abspielen, sind eingehend untersucht worden. (PIAGET/INHELDER/SZEMINSKA, 1975, LOVELL, 1961, SIGEL/HOOPER, 1968, Zusammenfassung auch hierzu: FLAVELL, 1963) Vor allem der Entwicklung des Zahlbegriffs ist außerordentliche Aufmerksamkeit geschenkt worden. (PIAGET/SZEMINSKA, 1965, RAUH, 1972)

Es ist für didaktische Fragen wohl nicht entscheidend, ob die Erkenntnisgewinnung nun streng den von PIAGET vermuteten Wegen folgt. Die Meinungen darüber gehen in der Tat weit auseinander. Man findet "PIAGET-orientierte Curricula" ebenso wie außerordentliche Skepsis gegenüber solchen Bemühungen. (So etwa bezweifelt FREUDENTHAL, 1973, ob die PIAGETsche Theorie für mathematikdidaktische Fragen von besonderer Bedeutung ist.) Insbesondere ist es schwierig, Sequenzen bei der Entwicklung von Begriffen nachzuweisen (vgl. etwa die Arbeit von WOHLWILL, 1968). Hinzu kommt, daß sich einerseits empirische Befunde nicht schlicht und schnell in Postulate für den Unterricht umsetzen lassen und daß andererseits der Einfluß von Lernprozessen in der PIAGETschen Theorie kaum berücksichtigt wird.

Wir wollen daher im folgenden nicht versuchen, die Überlegungen zur Bildung mathematischer Begriffe streng in einen PIAGET-Rahmen einzuordnen. Es scheint, daß auch die Diskussion der letzten Jahre sich allzu sehr an solchen Fragen festgeklammert hat (etwa wenn es darum geht, ob genau diese oder jene kognitiven Operationen konstitutiv für den Zahlbegriff sind u.ä.). Wichtiger und fruchtbarer ist die Grundvorstellung, daß sich Begriffsbildung keineswegs auf einfache Vorgänge reduzieren läßt, sondern die Ausformung und Interaktion zunehmend differenzierterer kognitiver Möglichkeiten verlangt, die Schicht für Schicht mühsam aufgebaut werden.

2.1.4.2 Formale Operationen

(1) Für unsere Diskussion bedeutsam ist, daß im Stadium der konkreten Operationen zwar notwendige Voraussetzungen für die Entwicklung des Verhältnisdenkens geschaffen werden, daß der entscheidende Durchbruch aber dem Kind noch nicht gelingt. Auf entsprechende Stichworte stößt man an vielen Stellen des PIAGETschen Werkes. Einige davon stellen wir hier zusammen.
In einer älteren Arbeit PIAGETs (1975, Original 1950) findet man erste Versuche, die Genese der Bruchzahlen aufzuzeigen.

"Die gebrochene Zahl stellt, wie auch die negative, die Frage nach der Beziehung zwischen der operativen Handlung und der wahrnehmenden Vorstellung und infolgedessen nach der Beziehung zwischen den beiden Arten der Abstraktion, derjenigen von der Handlung und derjenigen vom Objekt. Obschon die natürliche Zahl früher ins Bewußtsein tritt, wird auch die Bildung der gebrochenen Zahl durch perzeptive Betrachtungen begünstigt, in diesem Fall sowohl durch die Teilung kontinuierlicher als auch diejenige diskontinuierlicher Mengen. Die Teilung war für ihre Entdeckung entscheidend, und die Vormachtstellung der kontinuierlichen Objekte, wie ein Feld oder ein Kuchen, brachte gewisse Autoren dazu, der gebrochenen Zahl einen mehr räumlichen als arithmetischen Ursprung zuzuschreiben und (was übrigens keineswegs auf das gleiche hinausläuft) einen mehr perzeptiven als operativen Ursprung. Wir müssen somit herausfinden, wie die Betrachtung der Beziehung zwischen den Teilen innerhalb eines und desselben Ganzen den Begriff der gebrochenen Zahl nötig macht: Ist es die operative Koordination ... oder sind die Wahrnehmung oder die anschauliche Vorstellung unerläßlich, da sie allein die Abstraktion von den Objekten ermöglichen? ... Man darf daraus aber

> weder schließen, daß die gebrochene Zahl von physikalischen Objekten abstrahiert sei - da sie aus Handlungen oder Operationen bestehe, die auf diese Objekte ausgeübt werden -, noch, daß das physikalische Experiment von derselben Natur sei wie die mathematische Operation... Von diesem Gesichtspunkt aus ist es evident, daß die gebrochene Zahl wie die ganze Zahl auf die operative Koordination bezogen bleibt und keine speziellen Handlungen mit einbezieht!" (S. 114/115)

Diese Aussage bleibt zwar noch an vielen Stellen unscharf, weist aber schon auf die Spannung zwischen Wahrnehmung, physikalischem Experiment und "operativer Koordination" hin. Welche Operationen weiterhelfen und wie sie koordiniert werden müssen, können nur gezieltere Versuche zeigen.

PIAGET/INHELDER/SZEMINSKA (1975) untersuchen kindliche Meßversuche (Längen, Winkelgrößen, Flächeninhalte, Volumina) und decken dabei Schwierigkeiten auf, vor denen Kinder stehen, wenn sie etwa bei Flächenteilungsaufgaben mit Beziehungen zwischen Teil und Ganzem (als Vorstufe der Erfassung von Bruchrelationen) zu tun haben. Während den Versuchspersonen Halbierungen noch wenig Mühe bereiten, gelingt die Zerlegung einer Fläche in drei oder mehr (kongruente) Teilflächen meist erst nach einigen tastenden Versuchen. Die deutlich zu beobachtende Kluft zwischen den beiden Leistungen veranlaßt die Autoren, sie zwei verschiedenen "Stufen" zuzuordnen. Basiert die Halbierung im wesentlichen nur auf der Feststellung der Gleichheit von abgeschnittenem Teilstück und Rest - wir werden an vielen Stellen unserer Untersuchungen entsprechende Beobachtungen machen -, müssen für andere Zerlegungen differenziertere Schemata verfügbar sein. PIAGET/INHELDER/SZEMINSKA (S. 396) stellen dazu fest:

> "Verantwortlich für diese Schwierigkeit der Teilung ist selbstverständlich das Fehlen eines antizipatorischen Schemas, mittels dessen der gesuchte Teil von vornherein in ein zugleich teilbares und der Gesamtheit seiner Elemente äquivalentes Ganzes eingefügt werden könnte. Aber auf diesem Gebiet wie auf allen anderen ... geht aus den Tatsachen eindeutig hervor, daß ein antizipatorisches Schema nicht ausschließlich aus dem Denken hervorgehen kann, denn die Vorstellung kann nicht voraussehen, wenn sie nicht vom Handeln selbst gesteuert wird."

INHELDER/PIAGET (1958) analysieren an zahlreichen Beispielen (u.a. Gleichgewicht an der Balkenwaage und der hydraulischen Presse, kommunizierende Röhren, Schattenprojektion,Schwingungsfrequenz eines Pendels) die Versuche von Heranwachsenden, Vorhersagen zu machen, relevante Faktoren herauszufinden, Zusammenhänge zwischen Variablen nachzuweisen. Ihre ausführlichen Protokolle zeigen, wie es den Versuchspersonen in zunehmendem Alter gelingt, Instrumente der Logik zu entwickeln und zur Lösung von Problemen einzusetzen, die zum großen Teil Verhältnisüberlegungen fordern.

In PIAGET (1970a) werden ähnliche Fragen am Beispiel des Geschwindigkeitsbegriffs diskutiert.

PIAGET/GRIZE/SZEMINSKA/VINH BANG (1968) untersuchen in einer neueren Arbeit die Genese des Funktionsbegriffs. Dabei stoßen sie natürlich an vielen Stellen auf Proportionen. Auch hier zeigen sich deutliche Stufen des Verständnisses, die von der einfachen "coordination des couples" bis zur "quantification des fonctions constituées" reichen.

Auf die Arbeit von PIAGET/INHELDER (1951) zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsdenkens gehen wir in 2.2 genauer ein.

(2) Trotz der zahlreichen Hinweise, die sich zum Problem des Verhältnisdenkens im PIAGET-Werk finden, ist es schwierig, eine konsistente Theorie zu bilden, die diese Phänomene befriedigend erklärt. Zunächst ist nur deutlich, daß das Kind an allen skizzierten Stellen über einfache Größenvergleiche hinausgelangen muß. Wie dies geschieht, ist allerdings schwer erkennbar. Einen möglichen Grund dafür gibt LOVELL (1971, S. 143) an, der in einer Diskussion vorliegender Arbeiten bedauert:

> "But no one has yet taken representative samples of children and traced their growth longitudinally in respect of the scheme of proportion, across many content areas ... We need to know, too, what influence progress in respect of the elaboration of the scheme of proportion in geometric examples has on its implementation in nongeometric contexts. Again, we want more information on the developmental process and the specific difficulties pupils encounter."

Für PIAGET ist dieser Fortschritt eng mit dem Übergang zu einem neuen kognitiven Niveau verbunden, eben dem Stadium formaler Operationen[1].
Eine ausführliche Darstellung des mit der Adoleszens einsetzenden Denkens findet man bei INHELDER/PIAGET (1958), eine Zusammenfassung bei PIAGET/INHELDER (1969) und FLAVELL (1963). An den letztgenannten Autor lehnen wir uns im folgenden an.
FLAVELL (S. 205ff) nennt als Charakteristika des formal-operativen Denkens:

---

1) Es bleibt die Frage, ob es nicht ausreicht, weniger anspruchsvoll lediglich eine wachsende Vertrautheit mit den bis dahin entwickelten Möglichkeiten anzunehmen. Diesen nützlichen Hinweis, daß es vielleicht einfacher ist, schlicht von einer zunehmenden "familiarity" auszugehen, verdanke ich Herrn Prof. Dr. S. AVITAL (Haifa).

"(1) A cognitive strategy which tries to determine reality within the context of possibility is fundamentally h y p o t h e t i c o - d e d u c t i v e in character ... To try to discover the real among the possible implies that one first entertain the possible as a set of hypotheses to be successfully confirmed or infirmed.

(2) Formal thinking is above all p r o p o s i t i o n a l - t h i n k i n g. The important entities which the adolescent manipulates in his reasoning are no longer the raw reality data themselves but assertions or statements -propositions- which 'contain' these data ... Formal operations, then, are really operations performed upon the results of prior (concrete) operations. Piaget has this propositions-about-propositions attribute in mind when he refers to formal operations as s e c o n d - d e g r e e o p e r a t i o n s...

(3) The adolescent subjects the variables to a c o m b i n a t o r i a l a n a l y s i s... He begins by organizing the various elements of the raw data with the concrete operational techniques of middle childhood. These organized elements are then cast in the form of statements or propositions which can be combined on various ways."

(3) Ohne auf weitere Einzelheiten und Versuche einzugehen, scheint diese Skizzierung des formal-operativen Denkens neues Licht auf die Entwicklung des Bruch- und Verhältnisbegriffs werfen zu können. In allen Zugängen, die im Kap. 1 aufgezeigt worden sind, werden vom Kind Leistungen verlangt, wie sie im vorangehenden Zitat beschrieben werden. Das Kind beginnt zwar beim Größenver-

gleich, muß aber, um weiterzukommen, diese Ebene verlassen. Die gewonnenen Relationen in Größenbereichen werden zum Rohmaterial für die weitere Arbeit, "Relationen zweiten Grades" werden gebildet, das Denken wird "hypothetisch-deduktiv". Nicht mehr die Größen stehen im Mittelpunkt, sondern Aussagen über Größen und Verknüpfungen dieser Aussagen, mit ihrer Hilfe gelangt man zum Vergleich von Verhältnissen und Anteilen. Als Beispiel: Die Begründung, daß zwei Spielfelder gleich gut sind, verlangt etwa zu erkennen, daß in beiden der gleiche Teil der Gesamtfläche eingefärbt worden ist. Damit aber wird der Vergleich von Teilungsprozessen erforderlich, was wiederum auf Konjunktionen von Aussagen über Größen führt.

Sieht man sich die in Abschnitt 1.3.3 zusammengestellten Definitionen der Verhältnisgleichheit an, so entdeckt man in jeder von ihnen sehr komplizierte logische Gebilde, in denen Quantoren und Verknüpfungen auftreten. Genau dies korrespondiert mit den Stichworten, die wir zur Kennzeichnung formaler Operationen gesammelt haben. Eine Existenzaussage ist in gewissem Sinne das mathematische Korrelat des psychologischen Prozesses, der das Überschreiten des konkret Vorgegebenen ermöglicht. Ersetzt man das "Es gibt..." durch "Hier ist...", wird dieser Schritt sicherlich erleichtert. Im allgemeinen aber kommt man nicht umhin, beim Verhältnisvergleich nach passenden Operatoren, gleichwertigen Größenpaaren oder geeigneten Ketten zu suchen - sämtlich Objekte, die erst geschaffen oder entdeckt werden müssen und durch die Ausgangssituation keineswegs von vornherein mitgeliefert werden.

Die Anforderungen, die damit gestellt werden, unterscheiden sich wesentlich von denen bei der Bildung des (natürlichen) Zahlbegriffs. Zwar ist auch die Entdeckung von eineindeutigen Zuordnungen, Einschachtelungen und Reihenbildungen für das jüngere Kind ein gewaltiger

Fortschritt, doch die Handlungen und Operationen bleiben eng an Objekte und Bilder gebunden. Hypothetisch-deduktives Denken, Umgang mit Aussagen und Operationen zweiten Grades sind noch nicht erforderlich.

Es ist also sicher kein Zufall, daß das Kind erst mit etwa zwölf Jahren zur Lösung einer Vielzahl von Problemen fähig wird, denen es bis dahin hilflos gegenübersteht. PIAGET stellt mit Nachdruck fest, daß diese Entwicklung durchaus nicht mit einer Steigerung der Sprachkompetenz identisch ist.

> "[Hier] reicht also die Sprache nicht aus, um das Denken zu erklären, denn die Strukturen, die dieses kennzeichnen, wurzeln in der Aktion und in tiefer als das Linguistische reichenden sensomotorischen Mechanismen. Doch ebenso klar ist, daß, je verfeinerter die Strukturen des Denkens sind, die Sprache um so notwendiger für die Vollendung ihres Aufbaus ist. Die Sprache ist also eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die Erstellung der logischen Operationen. Sie ist notwendig, denn ohne das System symbolischer Ausdrücke, das sie darstellt, würden die Operationen im Zustand sukzessiver Handlungen verharren, ohne sich jemals in simultane oder in simultan eine Gesamtheit verknüpfter Transformationen umfassende Systeme einzugliedern. Weiters würden die Operationen ohne die Sprache individuell bleiben und folglich nicht zu jener sozialen Steuerung gelangen, die aus dem interindividuellen Austausch und der Kooperation resultiert. In diesem zweifachen Sinn ist die Sprache also insofern ein genetischer Kreis, als eines notwendigerweise auf dem jeweils anderen beruht und eine ständige Wechselwirkung besteht." (PIAGET, 1972, S. 279/280)

(4) Einige Anmerkungen sind zu dem Versuch PIAGETs notwendig, die Struktur formaler Operationen mit Hilfe eines logisch-mathematischen Modells zu beschreiben. An vielen Stellen (insbesondere bei INHELDER/PIAGET, 1958) findet man erhebliche Anstrengungen, um aufzuzeigen, daß die entscheidenden Fortschritte des Heranwachsenden Hand in Hand mit der Ausbildung einer mathematischen Struktur gehen, die PIAGET als INRC-Gruppe bezeichnet. Der mathematische Kern läßt sich einfach angeben. Es handelt sich um eine Gruppe von Abbildungen auf der Menge der (16 zweistelligen) aussagenlogischen Aussageformen (genauer: auf dem Boole-Verband, den man daraus als Quotientenstruktur bezüglich der logischen Äquivalenz erzeugen kann). Ihre Elemente sind neben der identischen Abbildung I und der Negation N eine Abbildung C, "correlativity", die jedem aussagenlogischen Ausdruck den dualen zuordnet, endlich noch die "reciprocity" R als Verkettung von N und C (ihre Anwendung bedeutet die Verneinung aller Teilaussagen in einem Ausdruck). Beispielsweise ist $I(\neg p \vee q) = \neg p \vee q$, $N(\neg p \vee q) = p \wedge \neg q$, $R(\neg p \vee q) = p \vee \neg q$, $C(\neg p \vee q) = \neg p \wedge q$. Die Gruppenstruktur ist problemlos.

An einigen Stellen bei INHELDER/PIAGET (1958) wird in der Tat sichtbar, wie ältere Kinder Aussagentransformationen dieser Art zu Hilfe nehmen, wenn sie komplexe Probleme (etwa Gleichgewicht an einer Balkenwaage; Einfluß verschiedener Variablen auf die Frequenz eines Pendels; Vorhersage der Größe des Schattens verschiedener Objekte) zu lösen versuchen. Dennoch wird m.E. weder bei PIAGET noch bei anderen Autoren (man vergleiche die Bemühungen von MONTADA, 1970) klar, daß es gerade diese neue Struktur ist, die hinreichend und/oder notwendig für die Entfaltung des hypothetisch-deduktiven Denkens ist. FLAVELL (1963, S. 221/222) faßt dies so zusammen:

> "In gist, one's understanding of what Piaget intends becomes clearest where there are fewest questions... and least clear where troublesome ambiguities and potential problems loom (the precise theoretical role of the logical INRC group and the nature of the connection between propositional thought and the negation-reciprocal substructure)."

Fällt es schon schwer, die Bedeutung der INRC-Gruppe für die Entwicklung des Denkens allgemein abzuschätzen, so werden die offenen Fragen noch zahlreicher, wenn man herauszufinden versucht, wie sich aus ihr die Erfassung numerischer Proportionen ergibt:(Vgl. INHELDER/PIAGET, 1958, S. 314ff.) Zwar stellen INHELDER/PIAGET (1969, S. 141) lapidar fest:

> "The relation between the 4-group and numerical or metrical proportion is clear. (The value of a function can be modified in the same direction either by adding to the numerator or subtracting from the denominator.)"

Doch so einfach scheint die Lösung wohl nicht. Es ist auffallend, mit welcher Zurückhaltung andere Autoren das PIAGETsche Deutungsschema übernehmen, bei vielen fehlt es ganz. (So verzichtet LOVELL, 1971, in seiner Arbeit zur Entwicklung des Verhältnisbegriffs auf dieses Modell.) Es erscheint einfacher, statt der Vierergruppe die Vierstelligkeit der Relation der Verhältnisgleichheit in den Mittelpunkt zu rücken.

Natürlich muß das Kind bei Mischungsaufgaben (wie wir sie ihm in den in 3.2 zu schildernden Versuchen vorlegen werden) überlegen, wie sich die Mischung ändert, wenn mehr Sirup oder mehr Wasser hinzugeschüttet wird, muß erkennen, daß der Saft weniger süß wird, wenn weniger Sirup oder mehr Wasser eingefüllt wird, muß verstehen, daß die Vergrößerung der Wassermenge durch mehr Sirup kompensiert werden kann. Als Beispiel: Die beiden

in den in Abb. 2.1 skizzierten Gläsern entstehenden Saftmischungen sollen verglichen werden. (Der Einfachheit halber stelle man sich quaderförmige Gläser gleicher Tiefe vor.) Nimmt man nun zwei Gläser zu Hilfe, die sich von den vorgegebenen entweder in der Höhe oder in der Breite unterscheiden, so könnte zu der Vergleichsüberlegung das in Abb. 2.2 angedeutete Schema passen.

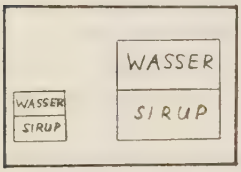


Abb.2.1: Welcher Saft wird süßer?

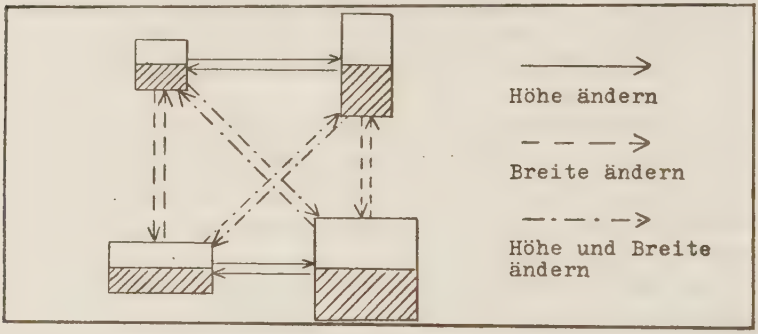


Abb.2.2: Zum Zusammenhang von Verhältnisvergleich und Größenänderungen

Dabei gehören die Pfeile zu den Operationen Vergrößern/Verkleinern der Höhe oder der Breite des Gefäßes. In der Tat erhält man so den (etwas erweiterten) Cayley-Graphen der Kleinschen Vierergruppe, die die vier möglichen Operationen bezüglich der Hintereinanderausführung bilden. Solche Stichworte bringen uns zwar in die Nähe der PIAGETschen Theorie, aber ist hier tatsächlich die INRC-Gruppe "am Werk"?

2.2 Analyse vorliegender Ansätze und Ergebnisse

2.2.0 Vorbemerkungen

Gezielte Untersuchungen zur Entwicklung des Bruch- und Verhältnisbegriffs liegen kaum vor. Während es eine fast unübersehbare Zahl von Arbeiten zur Genese des (natürlichen) Zahlbegriffs gibt, sucht man nach Veröffentlichungen zu unserem Thema ziemlich vergebens. Dies mag seinen Grund darin haben, daß die gestellten Fragen sowohl mathematisch als auch psychologisch komplexer sind. Jedenfalls findet man in den Stichwortverzeichnissen etwa zu den Abstracts der Zeitschrift "Child Development" unter dem Hinweis "number" eine Fülle von Angaben, bei "fraction" oder "ratio" dagegen nichts.
In den beiden nächsten Abschnitten werden wir zunächst auf zwei Arbeiten ausführlicher eingehen, die vom theoretischen Konzept und von den Untersuchungsmethoden her besonders wichtig sind und auch unsere Experimente in vielen Punkten deutlich beeinflußt haben.
In 2.2.3 geben wir dann einen Überblick über andere Ansätze und Ergebnisse.

2.2.1 Verhältnisdenken und Fähigkeit zu symbolischer Repräsentation: Die Untersuchung von BRUNER/KENNEY

(1) Im Rahmen der Arbeiten des "Center for Cognitive Studies" der Harvard-Universität über kognitive Entwicklung haben BRUNER und KENNEY (1971) eine Untersuchung durchgeführt, die den Stand des Verhältnisdenkens bei Kindern verschiedenen Alters aufdecken sollte. Die Fragen und Ergebnisse sind zwar nicht in mathematischen Termini formuliert, man entdeckt jedoch sehr deutliche Beziehungen zu unseren bisherigen Überlegungen.
Die "charakteristischen Züge des Denkens kleiner Kinder" fassen BRUNER/KENNEY so zusammen (S. 207):

"Einmal basiert ihre Kenntnis der Wirklichkeit auf Eigenschaften, auf die es [das Kind] direkt hinzeigen kann... Ausgedehnte Schlußfolgerungen, indirekte Information, nicht sinnliche Aspekte der Dinge werden alle vernachlässigt. Ein weiterer Aspekt dieses Musters, der zweite charakteristische Zug des kindlichen Denkens, ist seine Tendenz, jeweils eine einzige Linie der Wirklichkeit zu verfolgen, d.h. einen einzigen Aspekt der Situation zu zentrieren."

Was macht das Kind nun bei Begriffen, bei denen diese kognitiven Mittel nicht mehr ausreichen - also wenn es etwa Zahlen- oder Größenverhältnisse vergleichen will?[1)]

BRUNER/KENNEY legen ihren Versuchspersonen (Kindern im Alter von 5,6,7,9 und 11 Jahren) Gläserpaare vor, wie sie in der Abb. 2.3 dargestellt sind. Die Kinder werden aufgefordert, anzugeben, "welches Glas voller, welches leerer" ist, und ihre Antworten zu begründen. Die Aufgaben sind so zusammengestellt, daß die Entscheidungen sich in unterschiedlichem Grade auf Wahrnehmungshilfen stützen können.

---

1) Das BRUNER-Team geht entsprechenden Fragen auch in einer Vielzahl von anderen Untersuchungen nach. So zeigen OLVER/HORNSBY (1971) in ihrer Arbeit "Über Äquivalenz", daß Kinder mit zunehmendem Alter Objekte und Bilder in immer stärkerem Maße nicht nur nach Wahrnehmungsaspekten als gleichwertig zu erkennen imstande sind. "Entsprechend der Entwicklung der symbolischen Darstellung befreit sich das Kind von der Abhängigkeit von anschaulichen Zügen des Gegenstandes, die von Augenblick zu Augenblick variieren. Es wird fähig, die Grundlage der Äquivalenz invariant zu halten." (S. 114)

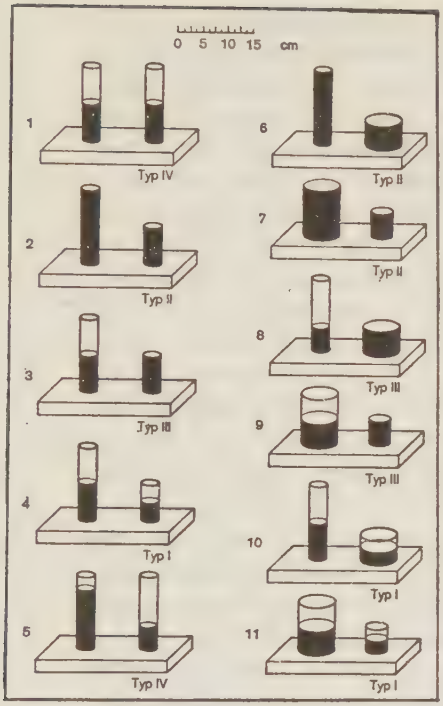


Abb.2.3: Aufgaben im Versuch von BRUNER/KENNEY (1971,S.21o)

Typ IV: Die Gläser sind identisch; Verhältnisvergleich wird auf den Vergleich der Wasserhöhen reduziert.
Typ II/III: Die Gläser haben verschiedene Volumina, mindestens eines ist ganz gefüllt. Der Vergleich verlangt im wesentlichen die Differenzierung "voll - nicht voll" bzw. "beide voll".[1)]
Typ I: Gläser von ungleichem Volumen sind zu gleichen Teilen (jeweils zur Hälfte) gefüllt. Für die Urteile reichen nun so einfache Kriterien wie bei den anderen Typen nicht mehr aus.

1) Es scheint einfacher, die von BRUNER/KENNEY getroffene Unterscheidung zwischen Typ II und III nicht vorzunehmen. Wie die Befunde zeigen, gibt es auch in den Ergebnissen keine wesentlichen Unterschiede.

(2) Die wichtigsten Ergebnisse von BRUNER/KENNEY:

- Die Antworten der Kinder - insbesondere der fünf- bis neunjährigen - beruhen im wesentlichen auf dem Vergleich der Wassermengen. Dies führt dazu, daß beim Typ I noch 74% der Neunjährigen sagen, daß "das höhere Glas mit dem höheren Flüssigkeitsniveau in jedem Paar voller sei" (S. 213). Bei den Elfjährigen allerdings sind es nur noch 31%. Die Antworten zu Typ IV sind fast vollständig richtig. Das kann nicht überraschen, da hier auch eine Strategie, die von adäquater Verhältnisüberlegung noch weit entfernt ist, zum Ziel führt. Die Ergebnisse der Typen II und III (mit etwa 50% richtigen Antworten) sind nicht allzu aussagekräftig, da bei allen Items mindestens ein Glas vollständig gefüllt ist.

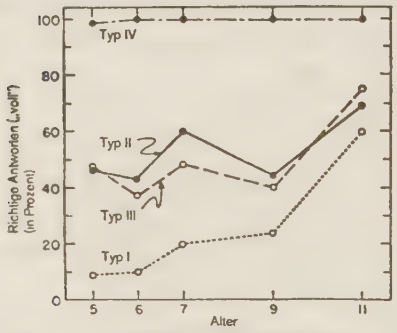


Abb. 2.4: Ergebnisse des Versuchs von BRUNER/KENNEY (1971, S.214)

- Ordnet man die Aufgaben nach der Anzahl der Wahrnehmungsfaktoren, die ein richtiges Verhältnisurteil erleichtern, so erhält man die in der Abb. 2.5 angegebenen Ergebnisse. Es wird deutlich, "daß die älteren Kinder den perzeptiven Faktoren weniger zum Opfer fallen." (S. 217) Auf entsprechende Beobachtungen werden wir in unseren eigenen Versuchen mehrfach zurückkommen.

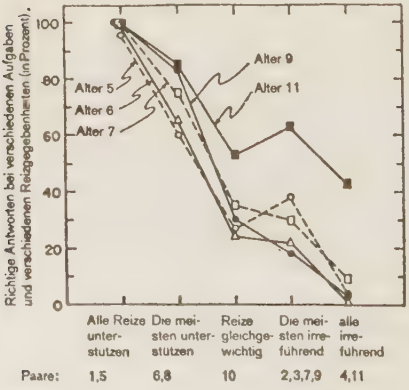


Abb.2.5: Zum Einfluß von Wahrnehmungshilfen bei Verhältnisentscheidungen (BRUNER/KENNEY,1971,S.217)

- Besonders bedeutsam ist das von BRUNER/KENNEY mitgeteilte Ergebnis, daß "widersprüchliche Fehler" mit zunehmendem Alter häufiger vorkommen. (Vgl. Abb. 2.6.)

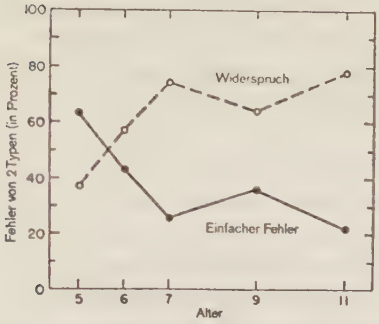


Abb.2.6: Häufigkeit des Auftretens zweier Fehlertypen (BRUNER/KENNEY,1971,S.219)

Ein solcher Fehler liegt dann vor, wenn das Kind ein Gefäß zugleich als voller und leerer bezeichnet. Die Autoren geben als Erklärung für diese Beobachtung: "Das jüngere Kind versucht, eine einzige Variable auf die beiden kontrastierenden Gläser anzuwenden. Das ältere Kind kann in der Situation zwei Variablen unterscheiden - den gefüllten und den leeren Raum -, aber es ist noch nicht fähig, diese zu einer dritten in Beziehung zu setzen, dem Volumen des Gefäßes selbst. Wenn das Kind einmal die Beziehung zwischen allen drei Größen herstellen kann ..., besitzt es den symbolischen Begriff des Verhältnisses." (S. 220)

(3) Eine kritische Würdigung der BRUNER/KENNEY-Arbeit führt zu diesen Ergebnissen:

- Erhebliche Bedenken ruft die von den Autoren gewählte Fragestellung hervor. Die Aufforderung, zu entscheiden, "welches Glas voller ist", läßt für Mißverständnisse nicht nur einen großen Spielraum, sondern provoziert sie geradezu. Verhältnisüberlegungen werden keineswegs zwingend nahegelegt.[1)]

---

1) Diese Bedenken haben NELSON/ZELNIKER/JEFFREY (1969) zu einer "re-examination" des geschilderten Versuches veranlaßt. Sie versuchen, die sprachliche Unschärfe dadurch zu beheben, daß sie mit den Kindern vor dem eigentlichen Experiment in einer Trainingsphase Begriffe wie "voll", "leer", "halb-voll", "mehr als halb-voll", "weniger als halb-voll" einüben. Es überrascht nicht, daß die Ergebnisse dann deutlich besser ausfallen als bei BRUNER/KENNEY. Allerdings ist dies nicht als Fortschritt im Verhältnisdenken interpretierbar, sondern kaum mehr als das Erlernen des Gebrauchs einiger neuer Wörter.

- Die Auswahl der Gläserpaare ist so vorgenommen, daß man nur Auskünfte darüber erwarten kann, ob und in welchem Ausmaß Kinder mit den Begriffen "ganz voll" und "halb voll" umgehen können.

- Es bleibt offen, wie das Kind das "neue Stück kognitiver Technologie" (S. 222) erwirbt, zu dem der Verhältnisbegriff später wird. BRUNER/KENNEY selbst weisen darauf hin:

  "Es ist sehr deutlich, daß dieses nicht bloß die Beachtung einer größeren Zahl von Dimensionen in sich schließt, sondern eine neue Art, diese zueinander in Beziehung zu setzen. Es bleibt die Frage, mit welchen Mitteln das Kind diese letztere Leistung vollbringt. Es ist dies die Frage, wie das Kind seine symbolischen Möglichkeiten benützt, um den Verhältnisbegriff zu bilden, in den die ursprünglich dominierenden Wahrnehmungsgegebenheiten eingehen und darin verarbeitet werden." (S. 222).
  "Irgendwo auf dem Weg, der das Kind vom partiellen und eingeschränkten Gedanken der Vollheit zum eigentlichen Begriff des Verhältnisses führt, muß ein kritisches Ereignis eintreten." (S. 209).

  Doch wie sieht dieses "kritische Ereignis" aus?

- Dennoch wird sich an vielen Stellen unserer Arbeit der Einfluß des Versuchs von BRUNER/KENNEY zeigen. Dies hat seinen Grund vor allem darin, daß das Experiment fruchtbare methodische Ansätze liefert. Es macht deutlich, daß Untersuchungen zur Entwicklung des Verhältnisdenkens sich nicht auf das Abfragen formaler Fertigkeiten beschränken können, sondern der Begriffsgenese nachgehen müssen. Einblicke in diesen Prozeß, in dessen Verlauf das Kind eine höhere Ebene in der intellektuellen Auseinandersetzung mit seiner Umwelt erreicht, kann man nur durch behutsame und bescheidene Anstrengungen erhoffen, nicht durch Großversuche.

2.2.2 Vernältnisvergleiche in Wahrscheinlichkeitssituationen: Die Untersuchung von FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT

(1) FISCHBEIN und seine Mitarbeiter haben in einigen Arbeiten Aspekte der Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsdenkens untersucht (FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT, 1969, 1970, 1970a). Besonders wichtig für unsere Diskussion ist ihr Beitrag 1970, in dem sie den Stand des Verhältnisdenkens in verschiedenen Altersstufen beschreiben.

Als Versuchspersonen wählen sie je 60 Kinder, die zu drei Stadien kognitiver Entwicklung, wie sie von PIAGET angegeben werden, gehören:

Vorschulkinder (5;0 - 6;4 Jahre) - präoperationales Stadium,

Schüler der 3. Klasse (9;0 - 10;0 Jahre) - Stadium der konkreten Operationen,

Schüler der 6. Klasse (12;4 - 13;7 Jahre) - Stadium der formalen Operationen.

Den Kindern werden je 18 Aufgaben vorgelegt. Sie werden aufgefordert, jeweils zwei "Urnen" (Lostrommeln), in denen sich schwarze und weiße Kugeln befinden, nach den Chancen für das Ziehen einer Kugel vorgegebener Farbe zu vergleichen. Die verwendeten Aufgaben sind in der Tabelle 2.1 zusammengestellt. (5/2 bedeutet: In der Urne sind 5 weiße und 2 schwarze Kugeln.)

	Small Sets		Large Sets	
C_1	(1) 1/2:5/2	(2)	2/4:10/4	
	(3) 3/1:3/2	(4)	6/2:6/4	
	(5) 2/2:6/3	(6)	4/4:10/6	
C_2	(7) 6/2:10/3	(8)	12/4:20/6	
	(9) 2/1:5/2	(10)	4/2:10/4	
	(11) 4/2:5/3	(12)	8/4:10/6	
C_3	(13) 2/4:1/2	(14)	4/8:2/4	
	(15) 3/1:6/2	(16)	6/2:12/4	
	(17) 4/2:2/1	(18)	8/4:4/2	

Tab. 2.1: Aufgaben im Versuch von FISCHBEIN u.a. (1970, S. 379)

Die Aufgaben werden in drei "Kategorien" eingeteilt:

C_1: In beiden Urnen befinden sich schwarze oder weiße Kugeln in gleicher Anzahl bzw. in einer der Urnen ist gerade die Hälfte der Kugeln schwarz.

C_2: Die Anzahlen unterliegen keinen Restriktionen.

C_3: Die Chancen (Verhältnisse)sind in beiden Urnen gleich.

Für ihre Untersuchung wählen die Autoren drei Varianten der Instruktion, die den Kindern vor Versuchsbeginn gegeben wird. In jeder Altersgruppe erhält ein Drittel der Kinder lediglich an einem Beispiel Hinweise auf die möglichen Antworten (I_1). Mit den übrigen Versuchspersonen wird ein Vergleichsverfahren zur Beurteilung der Chancen besprochen. Die Kinder werden darauf hingewiesen, daß sich die Einschätzung der Chancen nicht nur auf die Anzahl der günstigen Fälle stützen kann. Um dies einsichtig zu machen, wird eine Gruppierungstechnik (grouping technique) vorgeführt und erläutert, die darin besteht, daß die beiden zu vergleichenden Urnen geschickt aus Teilurnen aufgebaut werden.(Beispiel: Um 4 schwarz/1 weiß mit 6 schwarz/2 weiß zu vergleichen, wird 3 schwarz/1 weiß zu Hilfe genommen.) Bei der I_3-Instruktion wird lediglich diese Technik erläutert, in den I_2-Gruppen zudem noch mehrmaliges Ziehen durchgespielt und das Ergebnis diskutiert.

(2) Die varianzanalytische Auswertung des Versuchs liefert folgende wichtige Ergebnisse:

- Es zeigen sich keine Unterschiede zwischen Jungen und Mädchen.
- Für die Mittelwerte richtiger Antworten erhält man - aufgeschlüsselt nach Alter, Instruktion und Aufgabenkategorie - die Werte der Tab. 2.2.

Age Level	Instructional Condition and Category of Trial								
	I_1			I_2			I_3		
	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
Preschool.....	4 25	2 70	1 00	4.35	2.70	2 10	3 90	2 80	1 75
Third grade.....	5 05	2.65	2 95	5.35	4 00	4 50	5 45	3 50	4 35
Sixth grade.....	5.65	4.55	4.90	5.85	5.35	5 65	5 70	5.65	5.90

Tab. 2.2: Mittelwerte richtiger Antworten in der Untersuchung von FISCHBEIN u.a. (1970, S. 382)

- Die Faktoren Alter, Instruktion und Aufgabenkategorie erweisen sich als hochsignifikant. Unter I_2- und I_3-Bedingungen erreichen die Kinder bessere Ergebnisse als ohne Hilfestellung (I_1). Zwischen I_1 und I_3 allerdings zeigen sich keine Unterschiede.
- Es ist eine deutliche Wechselwirkung zwischen Alter und Aufgabenart nachweisbar. Die auffälligsten Verbesserungen bei zunehmendem Alter findet man in den C_3-Aufgaben.
- Die Instruktionseffekte sind am kräftigsten in der C_3-Kategorie. (Dies sind gerade die Aufgaben, bei denen sich das Kind nicht mehr auf Wahrnehmungshinweise verlassen kann.)
- Bei den neun- bis zehnjährigen Kindern führt die Gruppierungstechnik dazu, daß sie von einem spontanen, dem des Vorschulkindes vergleichbaren Vorgehen zu einem Lösungsverhalten gelangen, das dem der ältesten Gruppe entspricht.

(3) Die Arbeit von FISCHBEIN und Mitarbeitern stellt die systematischste Analyse zur Entwicklung des Verhältnisdenkens dar, die zur Zeit vorliegt. Allerdings verstellt diese Systematik auch ein wenig den Blick für die kindlichen Überlegungen, die sich hinter den Testergebnissen verbergen. Die Fragen, woran Kinder scheitern, in welche Widersprüche sie sich verwickeln, wie sie Schritt für Schritt weiterkommen, sind gewiß in der BRUNER/KENNEY-Untersuchung deutlicher geworden. Dies scheint durchaus kein Zufall zu sein, sondern der Preis, um den jedes Streben nach statistischer "Sauberkeit" erkauft werden muß. Wir werden diesem Phänomen noch mehrfach begegnen.

Ein besonderes Problem muß noch erwähnt werden. Die vorgenommene Kategorienbildung ist bedenklich, vor allem wenn wir uns dem Grundgedanken BRUNERs anschließen, daß

es bei der Entwicklung des Verhältnisdenkens auf die Überwindung der Wahrnehmung ankommt. Ist die Gewinnfarbe Weiß, so lassen sich in C_1 die Aufgaben 1 und 5 und in C_2 Aufgabe 9 dadurch richtig lösen, daß man sich lediglich auf die Anzahl der weißen Kugeln stützt, bei den restlichen Aufgaben führt diese Strategie zur falschen Antwort. (Wählt man Schwarz als Gewinnfarbe, so gilt Entsprechendes für die restlichen Aufgaben - das Problem bleibt das gleiche.) Auf diese Weise geraten Aufgaben in die gleiche Kategorie, die nicht vergleichbar sind. Diese Vermutung wird in unserer Untersuchung 1 bestätigt. (Vgl. Kap. 3.) Leider werden von FISCHBEIN nur die Mittelwerte richtiger Lösungen, jeweils für die drei Aufgaben einer Kategorie errechnet, mitgeteilt, so daß eine genauere Überprüfung unmöglich ist.

2.2.3 Überblick über weitere Untersuchungen

(1) Wie schon erwähnt, sind Arbeiten zur Genese des Verhältnisdenkens bei Kindern nur sehr spärlich. Neben einigen Untersuchungen zur Bruchrechnung sind es vor allem Beiträge zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, in denen sich für unsere Frage relevante Aspekte verbergen. Eine ausführliche Zusammenstellung dieser Beiträge gibt HEITELE (1976, vgl. auch HEITELE 1975) im Rahmen des Versuchs, "Ansätze zu einem Stochastikcurriculum" zu sammeln.

Wohl als Auslöser weiterer Anstrengungen hat die Arbeit von PIAGET/INHELDER (1951) "La genèse de l'idée du hasard chez l'enfant" gewirkt.[1] Die Autoren gehen in zahlreichen Experimenten der Frage nach, wie sich Kinder zwischen 4 und 13 Jahren in verschiedensten Situationen verhalten, in denen es um Zufall und Wahrscheinlichkeit geht (Stichworte: Mischungen; Verteilungen; Münzenwurf

---

1) Die bisher einzige ausführliche Diskussion dieses Buches im deutschen Sprachraum findet man ebenfalls bei HEITELE (1976).

und Glücksräder; Urnenvergleiche; kombinatorische Operationen).
Besonders wichtig für unsere Überlegungen ist die Versuchsserie zum Vergleich von Urnen, deren zehn Aufgaben eng mit denen verwandt sind, die auch FISCHBEIN und seine Mitarbeiter verwendet haben. PIAGET/INHELDER beschreiben das Lösungsverhalten ihrer Versuchspersonen durch die Angabe von drei "Stadien". Im ersten Stadium werden (nach einer Phase, in der quantitative Vergleiche vollständig fehlen: 4;6 - 5;9 Jahre) die Entscheidungen zwar konsequent aufgrund von Zahlüberlegungen getroffen, jedoch wird dabei lediglich ein Merkmal berücksichtigt. Besonders dominierend ist die Anzahl der günstigen Fälle, aber auch die Gesamtzahl der Kugeln wird als Grundlage der Entscheidung gewählt. Im zweiten Stadium (6;6 - 12;2 Jahre) beherrschen die Kinder alle Aufgaben, die sich auf den Vergleich einer Variablen reduzieren lassen. Sie vergleichen zunächst wieder die Anzahl der günstigen Fälle, doch treten auch andere Variablen nun durchaus ins Blickfeld. In dieses Bild paßt die Beobachtung, daß einige Kinder dieser Altersgruppe versuchen, mit Differenzenvergleichen zum Ziel zu kommen.(Vgl. PIAGET/INHELDER, 1951, S. 65.) Mit Hilfe einer Gruppierungstechnik, wie sie auch im FISCHBEIN-Experiment gelehrt wird, sind die Kinder sogar in der Lage, Gleichwertigkeit von Urnen festzustellen. Erst im dritten Stadium (also im Alter von mindestens 12 Jahren) lösen die Kinder die Aufgaben selbständig und stützen sich dabei auf Proportionalitätsketten und indirekte Schlüsse. (Vgl. PIAGET/INHELDER, 1951, S. 173.)

Wie bei vielen PIAGET-Versuchen sind auch in der hier diskutierten Arbeit nur kleine Stichproben gewählt. Dies schmälert zwar nicht den Einfallsreichtum, macht aber Verallgemeinerungen schwierig. Zudem ist die sprachliche Formulierung stellenweise irreführend, die

Fragetechnik nicht einheitlich (für Forscher ohne die PIAGETsche Genialität sicherlich gefährliche Fallgruben). Dennoch bleibt festzuhalten, daß PIAGET und INHELDER in ihrer Arbeit bereits fast alle Probleme aufgezeigt haben, die in späteren Arbeiten aufgegriffen worden sind, und ihre Ergebnisse sind vielfach einleuchtender und zwingender als manche der in "statistisch sauberen" Experimenten gewonnenen. Unsere eigenen Versuche werden an mehreren Stellen ebenfalls PIAGETsche Einflüsse zeigen, in den Fragestellungen ebenso wie in den Methoden.

(2) Die PIAGET/INHELDER-Experimente liefern das Grundmuster für eine Reihe von weiteren Untersuchungen, von denen wir hier nur einige kurz erwähnen können.

MESSICK/SOLLEY (1957) und GINSBURG/RAPPOPORT (1967) versuchen die Frage zu klären, ob Kinder Anteile (die ihnen in verschiedener Weise vorgegeben werden) erfassen und auf andere Situationen übertragen können. Die Befunde sind nicht sehr aufschlußreich. Sie deuten zwar darauf hin, daß auch Kinder im Alter von 6 bis 8 Jahren "intuitiv" mit Anteilen umgehen, lassen aber vollständig offen, wie dies geschieht.

YOST/SIEGEL/ANDREWS (1962) wiederholen einen Teil der PIAGET/INHELDER-Versuche zum Urnenvergleich mit 20 jüngeren Kindern (4;10 - 5;8 Jahre). Dabei schaffen sie kontrolliertere Bedingungen und vermeiden den Rückgriff auf verbale Fertigkeiten. Die Kinder werden aufgefordert, sich für eine von zwei Urnen zu entscheiden. In beiden befinden sich gleich viele Gewinnkugeln, die Anzahl der Nieten ist verschieden. Die Ergebnisse liegen signifikant über denen, die unter "PIAGET-Bedingungen" erzielt werden. Dies führt die Autoren zu dem Schluß (S. 779):

> "It may reasonably be concluded from the highly significant results presented above that the 4-year-

olds have some understanding of probability." Allerdings muß diese Folgerung doch wohl sehr stark relativiert werden, wenn man an die kleine Zahl von Versuchspersonen und an die sehr speziellen Testaufgaben denkt. Bedeutsamer als das Ergebnis erscheint der methodologische Ansatz.

Ähnliche Einwände sind auch gegenüber der Arbeit von GOLDBERG (1966) notwendig, die - ebenfalls gestützt auf die Antworten von nur wenigen Vorschulkindern - zu dem Ergebnis kommt, daß ein Großteil falscher Entscheidungen darauf zurückzuführen ist, daß die Kinder Anzahlen statt Verhältnisse vergleichen.

DAVIES (1965) verfolgt die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs bei Kindern von 3 bis 9 Jahren und wählt dazu sowohl verbale wie nicht-verbale Aufgabenstellungen. Besonders wichtig ist ihre Beobachtung, daß die Ergebnisse in diesen beiden Typen umso stärker auseinanderklaffen, je jünger die Kinder sind. Erst die Neunjährigen erreichen in den mit sprachlichen Anforderungen beladenen Items etwa gleich gute Ausfälle wie in den sprachfreien. Dies steht im Einklang mit unseren Überlegungen zum Verhältnis der Entwicklung von Sprache und kognitiven Leistungen (vgl. 2.1) und ist eine deutliche Warnung vor einer Vermischung oder gar Identifizierung dieser beiden Typen von Fähigkeiten.

Einen varianzanalytischen Versuch zur Klärung von Entwicklungsprozessen von drei fundamentalen Konzepten probabilistischen Denkens ("sample space", "probability of a simple event","probability of the union of two or more mutually exclusive simple events") unternimmt LEAKE (1965). Daß sich dabei das Alter der Kinder als wichtiger Faktor herausstellt, ist nicht sehr überraschend. Weitreichender ist der Befund, daß das chronologische Alter weniger entscheidend als das "mental age" der Versuchspersonen ist. Allerdings basiert dessen Einschätzung nur auf dem erreichten schulischen Leistungsniveau und den Ergebnissen standardisierter Arithmetik-

tests. (Vgl. LEAKE, S. 80.)
Hohe Korrelationen zwischen IQ-Werten und der Fähigkeit zur Lösung von Wahrscheinlichkeitsaufgaben hat bereits PIRE (1958) nachgewiesen.

Auffallend ist, daß die vorliegenden Arbeiten kaum Hinweise auf die Genese des Verhältnisdenkens geben, im günstigen Fall sind sie Bestandsaufnahmen. Dies liegt zunächst einmal daran, daß die meisten Experimente so angelegt sind, daß die Kinder in ihnen kaum zu Wort kommen. Dies sichert zwar objektive und leicht kontrollierbare Versuchsbedingungen, engt aber zugleich das Gesichtsfeld außerordentlich ein. Es ist daher nicht überraschend, daß LEFFIN (1971) am Schluß seiner Arbeit die der von LEAKE (1965) eng verwandt ist, fordert, daß

> "further studies ... using an interview technique could provide valuable information about children's understanding..." (S. 195).

Eine weitere Ursache für die etwas kärglichen Erträge der Bemühungen scheint die zu sein, daß ihnen der mathematische Hintergrund fehlt und so der entscheidende Schritt vom Größenvergleich zur Erfassung von Wahrscheinlichkeiten nur hin und wieder einmal angesprochen wird. So weisen HOEMANN/ROSS (1971) zwar darauf hin, daß Größenvergleich noch kein "genuine probability concept" (S. 235), sondern allenfalls dessen Vorläufer ist, gehen dem damit sich bietenden Ansatz aber in ihren Experimenten nicht weiter nach.

(3) Nur wenige Arbeiten liegen vor, in denen das Verhältnisdenken aus einem wohl allzu engen probabilistischen Kontext herausgelöst und etwas von den hinter ihm stehenden kognitiven Prozessen aufzudecken versucht wird. LOVELL/BUTTERWORTH (1966) legen Kindern zwischen 9 und 15 Jahren Aufgaben vor, die in der Mehrzahl die Berechnung von Anteilen ("ratios") bzw. die Erfassung der Ver-

hältnisgleicheit (der Gleichheit solcher ratios) erfordern. Mit Hilfe einer Faktorenanalyse zeigen sie, daß den durch den Test erfaßten Fähigkeiten eine "central cognitive ability" (S. 7) zugrundeliegt, die bei den Aufgaben zur Verhältnisgleichheit erheblich stärker im Spiel ist als bei den Anteilaufgaben. Dieses Ergebnis ist nun leider so allgemein, daß es zwar kaum angezweifelt werden kann, aber auch nur wenig aufklärt. Wie sich etwa Verhältnisdenken im Unterricht fördern läßt, wird dadurch sicher nicht beantwortet. Die Autoren betonen,

> "that the schema of proportion and the schema of ratio are not available in all situations and tasks at the same time" ... "This strongly suggests that the kind of education and experience generally which our children experience from their earliest days are important from the point of view of the elaboration of mathematical concepts at the secondary stage." (S. 8)[1)]

Speziell diese Frage nach der Übertragbarkeit von Leistungen von einer Verhältnissituation auf eine andere stellen LONGEOT/BELLEUDY/CHANEAC (1971) in den Mittelpunkt ihrer Arbeit. Ihre Versuchspersonen haben fünf Tests zu bearbeiten. Die ersten drei bestehen aus Aufgaben des Themenkreises Zufall (wiederum in einer Urnenfassung); im vierten Test sind zu vorgegebenen Rechtecken ähnliche zu konstruieren; im fünften Test müssen die Kinder Gleichgewicht an einer Waage herstellen.

---

1) Ganz ähnlich äußern sich dazu auch LUNZER/PUMFREY (1966), die ebenfalls festgestellt haben, daß sich in den Leistungen bei verschiedenen Verhältnisaufgaben erhebliche Unterschiede zeigen.

Auf die Einzelheiten gehen wir hier nicht ein. Nach dem Vortest erhält ein Teil der Kinder Unterricht zum Umgang mit Wahrscheinlichkeitsaufgaben. Die Ergebnisse dieser Experimentalgruppe liegen dann im Nachtest auch deutlich über denen einer Kontrollgruppe - allerdings nur in diesem Aufgabentyp. Bei den restlichen Testitems dagegen ist keine Verbesserung festzustellen, erst recht kein Übergang von einem Stadium (im Sinne PIAGETs) zu einem höheren. Auch dieser Befund zeigt, daß Denkstrukturen sich offenbar kaum kurzfristig auf breiter Front beeinflussen lassen. Wir werden auf diese Tatsache noch im Rahmen unserer eigenen Versuche zurückkommen.

Mit einem gänzlich anderen Ausgangspunkt analysiert VOLLRATH (1976) das Problem der Ähnlichkeit von Rechtecken in einer Arbeit, die zwar nicht in den psychologischen Rahmen dieses Abschnitts paßt, aber dennoch hier skizziert werden soll. VOLLRATH bezweifelt, daß es sich bei der Erfassung der Ähnlichkeit um eine "spontane Entwicklung" etwa im Alter von 12 Jahren handelt, wie PIAGET/INHELDER (1971) in ihrem Buch über "Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde" angeben. Vielmehr zeigt sich bei der Analyse des Ähnlichkeitsbegriffs ein vielschichtiges Netz von möglichen Überlegungen, die sich auf Längen und ihre Verhältnisse und auf Winkelgrößen stützen und Schritt für Schritt die Bewältigung von Ähnlichkeitsfragen gestatten. Dies wird durch Versuche bestätigt, in denen älteren Kindern und Erwachsenen entsprechende Aufgaben vorgelegt werden. Aus diesen Überlegungen zieht VOLLRATH den Schluß, daß der Ähnlichkeitsbegriff (wie nahezu jeder andere) bereits in der Grundschule vorbereitet und spätestens in der Orientierungsstufe ausgebaut und mit anderen Erfahrungen verzahnt werden kann und muß.

(4) In der mathematikdidaktischen Literatur fehlen Untersuchungen zu unserem Thema fast vollständig. Die einzigen deutschsprachigen Arbeiten in dieser Richtung (LIND,

1973, 1975, MACKUTH/JAUMANN, 1975) beschränken sich auf die Schilderung von Bruchrechentests, mit deren Hilfe die Frage beantwortet werden soll, ob bestimmte Kurse zu einer Steigerung der Rechenfertigkeit führen. Was sich an Lernprozessen abspielt, bleibt dabei im Dunkeln.

Im englischen Sprachraum stößt man zwar auf eine Reihe von unterrichtspraktischen Einzelvorschlägen, die das Verständnis für Brüche und Verhältnisse erleichtern sollen, sie sind aber im wesentlichen nur Indizien für die zahlreichen Schwierigkeiten, mit denen Lehrer und Schüler in diesem Felde zu kämpfen haben.

BEARDSLEE/GAU/HEIMER (1973) betonen in einer Arbeit (die auf den Dissertationen der beiden erstgenannten Autoren beruht) die Bedeutung von enaktiven und ikonischen Hilfen für das Verständnis der Gleichwertigkeit von Brüchen und schlagen dazu einen "array approach" vor, der an bereits mehrfach erwähnte Vorgehensweisen erinnert: Die Schüler üben z.B. eine Zeitlang, blaue und rote Scheiben geschickt in Feldern anzuordnen, stellen dabei fest, daß etwa das 6-von-9- und das 4-von-6-Paar zu gleichartigen Feldern gelegt werden können, und schreiben $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$. Im Nachtest nun wird geprüft, ob eine "Verallgemeinerung" auf andere Zahlenpaare geleistet wird. Leider beschränken sich die Bemühungen auf solche Manipulationen mit Objekten und Zeichen, so daß die Relevanz der Ergebnisse nur bescheiden ist.

Ein umfangreiches Experiment zur Analyse des Verhältnis- und Bruchbegriffs ("ratio and fraction") bei Kindern des 4., 5. und 6. Jahrgangs beschreiben STEFFE/PARR (1968). Ihr Test besteht aus Aufgaben, bei denen Zeichenreihen der Art $\frac{6}{15} = \frac{\square}{5}$ bzw. $\frac{4}{10} = \frac{2}{\square}$ ergänzt werden müssen, und entsprechenden Aufgaben in ikonischer (pictorial) Fassung. Letztere wiederum wurden als

"fraction-problems" (gesucht werden Größenteile) und als "ratio-problems" (gesucht werden Zahlenpaare) gestellt. Als psychologischer Hintergrund wird die von INHELDER/PIAGET (1959) entworfene Theorie der formalen Operationen skizziert, allerdings bleibt diese Einbettung dann in den Hypothesen und Ergebnissen unerwähnt. Diese Ergebnisse sind zahlreich und verwirrend. Zum großen Teil sind sie isolierte Einzelaussagen, die sich auf spezielle Subtests und Klassen beziehen.
Als wichtige Befunde sind zu nennen (vgl. STEFFE/PARR, S. XI und 26):

- Die Leistungen des 5. und 6. Jahrgangs sind signifikant besser als die des 4.
- Kinder mit hoher Intelligenz erreichen höhere Punktzahlen als ihre weniger intelligenten Kameraden.
- Es besteht nur eine schwache Korrelation zwischen den Leistungen bei ikonischen und symbolischen Aufgaben.
- Viele der bildlich gestellten Aufgaben werden zwar "by visual inspection" (S. 26) gelöst. Sobald jedoch die Wahrnehmungsdaten nicht mehr zu einer Lösung führen, wird die Beantwortung sprunghaft schwieriger.

Vor allem die beiden letzten Ergebnisse unterstreichen die Ansätze von PIAGET und BRUNER und geben wertvolle Hinweise, wo der Schwerpunkt von Untersuchungen und Hilfestellungen liegen könnte.

3. UNTERSUCHUNGEN ZUR ENTWICKLUNG DES VERHÄLTNISDENKENS

3.1 Verhältnisvergleiche von Kindern in verschiedenen Altersstufen (Untersuchung 1)

3.1.1 Ziele, Probleme und Durchführung des Versuchs

(1) Die Bemühungen, die in diesem Abschnitt beschrieben werden, stellen einen ersten Versuch dar, Verhältnisdenken (oder Ansätze dazu) bei Kindern verschiedenen Alters zu erfassen.
Damit wollen wir zum einen Anschluß an vorliegende Untersuchungen gewinnen, insbesondere Hinweise, wie die in diesen verwendeten Fragestellungen präzisiert werden können. Zum anderen wird sich dieser Teil unserer Arbeit als "Pilot-Studie" für die weiteren Untersuchungen herausstellen. Sie soll uns erste Aufschlüsse geben über besondere Schwierigkeiten, die Kinder auf ihrem Wege zum Verhältnisdenken zu überwinden haben - diese Analyse steht im Mittelpunkt der Untersuchung 2 -, und über Ansatzpunkte für Förderungsbemühungen, die in den Untersuchungen 3 und 4 in den Vordergrund rücken.

Viele der Probleme, auf die wir hier stoßen, werden uns auch im weiteren unentwegt verfolgen, so das Problem der Fragestellung, der Formulierung relevanter Hypothesen, der Einbettung in curriculare Konzepte, der statistischen Absicherung u.v.a.m. Nicht zuletzt ist zunächst einmal zu klären, ob der von uns entwickelte Test überhaupt brauchbar ist.

Eine Feststellung ist gleich zu Beginn notwendig. Das "klassische" Vorgehen bei experimentellen Untersuchungen (Formulierung von Hypothesen in einem abgegrenzten Kontext; Konstruktion, Analyse, Revision eines entsprechenden Tests; Erstellung eines Versuchsplanes, Durchführung des Versuchs und statistische Auswertung mit

Hilfe einschlägiger Verfahren) führt bei fachdidaktischen Fragestellungen schnell zu einer Fülle spezifischer Schwierigkeiten. Zunächst einmal fehlt der tragfähige Rahmen, das Netz von gesicherten Aussagen, mit deren Hilfe sich klare Hypothesen formulieren ließen. Dazu liegen Tests oder auch nur Vorbilder für sie nicht vor. Der Versuch, dieses Problem befriedigend zu lösen, würde kaum noch Raum für weitere Bemühungen lassen. Ein ähnliches Dilemma ergibt sich bei der Suche nach Versuchsplänen. Um sie zu konstruieren, braucht man Informationen über die für die jeweilige Fragestellung relevanten Variablen, und gerade diese fehlen im Anfangsstadium.

So kann es gewiß nicht unser Ziel sein, eindrucksvolle Statistik zu treiben. Zu viele Hindernisse stehen dem im Wege. So etwa scheiterte der Versuch, durch eine Faktorenanalyse herauszufinden, welche Fähigkeitskomponenten für die erfolgreiche Bearbeitung der Aufgaben verantwortlich sind: Der Test war zu diesem Zweck nicht genügend erprobt, es waren zu wenig Kinder beteiligt, und endlich verstecken sich die Faktoren, die wir suchen, zwischen einer Vielzahl anderer Störfaktoren. Ähnlichen Schwierigkeiten begegnet man bei varianzanalytischen Ansätzen. In der vorliegenden Untersuchung stellt sich zunächst heraus, daß die Ergebnisse in einigen Gruppen nicht normalverteilt sind. Hinzu kommt, daß adäquate Aufgabenklassen in dieser Phase noch kaum zu bilden sind. Die von FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT (1970) verwendeten "Kategorien" werden sich als unbrauchbar erweisen, da die Unterschiede innerhalb der Kategorien zum Teil erheblich größer sind als die zwischen verschiedenen Kategorien.

Uns bleibt daher nur der Ausweg, bei den folgenden Analysen einzelnen Fragen behutsam nachzugehen und ausgewählte Ergebnisse auf ihre Signifikanz zu prüfen.

Statistische Standardverfahren verschütten dabei allzu leicht didaktisch relevante Fragen. Es scheint, daß sich hier ein Dilemma zeigt, das nicht nur unsere Untersuchungen, sondern didaktische Forschung allgemein erheblich erschwert. Empirische Verfahren sind nur dann brauchbar, wenn sie mit dem "erkenntnisleitenden Interesse" verträglich sind. Hier aber liegt die Problematik: Unser Interesse gilt didaktischen Fragen, die verfügbaren empirischen Werkzeuge sind jedoch in der Regel zur Lösung psychologischer Probleme entwickelt worden und daher auf diese zugeschnitten. Bei gröberen pädagogischen Fragestellungen (etwa Untersuchungen von Zusammenhängen zwischen exakt definierten Variablen) ist ihre Anwendung noch vertretbar, bei feineren und tiefer reichenden Fragen helfen sie nur noch wenig. Erst wenn es gelingt, didaktischen Fragen angemessene Versuchspläne und Testverfahren zu entwickeln, besteht Aussicht auf Überwindung der aufgezeigten Kluft. So ist es durchaus verständlich, daß gegenwärtig in den Erziehungswissenschaften ein Trend bemerkbar ist, der vom Großversuch wegführt (und damit genau in die insbesondere von PIAGET seit langem eingeschlagene Richtung).

(2) Die Fragen, die wir in dieser ersten Untersuchung zu beantworten (oder auch nur am Ende präziser stellen zu können) hoffen, sind noch nicht sehr differenziert. Es geht uns hier zunächst darum, Anhaltspunkte über den Stand des Verhältnisdenkens in den ausgewählten Altersstufen zu erhalten. Dies geschieht in erster Näherung über den Vergleich der Mittelwerte der am Versuch beteiligten Gruppen.
In 2.1 haben wir aufgezeigt, daß die Fähigkeit zur Verhältniserfassung eng mit der allgemeinen kognitiven Entwicklung zusammenhängt. Daher haben wir in der Altersstufe, in der die deutlichsten Fortschritte zu erwarten sind, eine Gruppe aus der Hauptschule und eine aus dem Gymnasium gewählt. Der Vergleich der Ergebnisse soll Aufschlüsse über unterschiedliche Leistungen in der glei-

chen Altersstufe geben. Aus organisatorischen Gründen wäre es sehr schwierig gewesen, einen Intelligenztest durchzuführen. Auch hätte der Aufwand in keinem rechten Verhältnis zum Nutzen gestanden. Uns reicht die grobe Erfassung der genannten Unterschiede durch den Vergleich zweier Extremgruppen. Wenn wir hier davon ausgehen, daß GY- und HS-Kinder solche Extremgruppen bezüglich allgemeiner kognitiver Fähigkeiten bilden, so hat dies natürlich keinen bildungspolitischen oder gar ideologischen "Beigeschmack".

(3) Die Items haben wir in Anlehnung an die von BRUNER/KENNEY (1971) und FISCHBEIN u.a. (1970) verwendeten ausgewählt. Die Zuordnung ist den Bezeichnungen (B4, F9,...) zu entnehmen. Allerdings haben wir von den BRUNER-Aufgaben nur wenige einbezogen, da die übrigen kaum Aufschluß über Verhältnisdenken geben können. Beibehalten haben wir die Einbettung der Fragestellung in ein Wahrscheinlichkeitsgewand, wie sie auch FISCHBEIN und Mitarbeiter (ebenso wie einige andere Untersucher) vorgenommen haben, jedoch haben wir uns für eine andere Ikonisation entschieden. Statt Urnen legen wir den Kindern Spielfelder vor.
Das geschieht aus zwei Gründen. Erstens sind wir dadurch nicht von vornherein auf Zahlenverhältnisse festgelegt, sondern können von Größen ausgehen, die dann natürlich bei Bedarf durch entsprechende Maßzahlen erfaßt werden können. Zweitens ist diese Darbietung für ein reales Spiel vorteilhaft, da die Kinder ihre guten und schlechten Chancen "vor sich liegen" sehen.
Dadurch hoffen wir, einen Weg gefunden zu haben, der für Kinder zwischen 5 und 13 Jahren brauchbar ist. Voraussetzung dazu ist eine Fragestellung, die unzweideutig und zwingend Verhältnisüberlegungen herausfordert, ohne auf vorwiegend sprachliche Vermittlung angewiesen zu sein. Damit wird keinesfalls die Bedeutung der Sprache

bei Begriffsbildungsprozessen übersehen, jedoch sollen unterschiedliche Sprachkompetenzen der Kinder möglichst wenig in die Ergebnisse eingehen. Die Entscheidung für eine derartige Fragestellung verengt natürlich unser Blickfeld und reduziert so die Anzahl möglicher Aussagen. Zahlreiche Aspekte des Verhältnisbegriffs gehen verloren. Dennoch ist dieses Opfer notwendig, wenn wir die Begriffsgenese verfolgen wollen, da sich andernfalls unsere Beobachtungen stets auf ein Gemenge aus Sprache und Denken beziehen würden.

Nicht vermeiden läßt sich verbale Interaktion bei der Formulierung der Testanweisung, doch haben wir darauf geachtet, daß bei der Aufgabenstellung nur den Kindern bereits vertraute Begriffe benutzt werden, insbesondere also nicht Vokabeln einer "Verhältnissprache". Die Anweisung lautet:

> "Wir machen zusammen ein Wettspiel. In diesem Heft sind 15 Spiele aufgezeichnet. Auf jeder Seite siehst Du zwei Kästchen mit schwarz-weißem Boden. Du hast eine Kugel, die Du in eines der beiden Kästchen werfen kannst. Gewonnen hast Du immer dann, wenn die Kugel auf SCHWARZ liegenbleibt.
> Wenn Du meinst, daß es besser ist, das linke Kästchen zu wählen, kreuze bitte den Kreis unter dem linken Kästchen an.
> Hältst Du das rechte Kästchen für besser, kreuze den Kreis darunter an.
> Bist Du aber der Meinung, beide Kästchen sind gleich gut, dann kreuze den Kreis in der Mitte an."

Diese Anweisung haben wir noch durch einige Probespiele erläutert, dabei insbesondere deutlich gemacht, daß blind geworfen und geschüttelt wird (und es sich so nicht um ein Geschicklichkeits-, sondern um ein Glücksspiel handelt).

Unter unseren Aufgaben befinden sich solche, bei denen man zum richtigen Verhältnisvergleich kommt, wenn man lediglich die Größe der schwarzen Flächen vergleicht ("G-Aufgaben": Der Verhältnisvergleich kann auf den Vergleich zweier Größen reduziert werden). Bei den übrigen Aufgaben führt die schlichte Orientierung an den gefärbten Flächen zum falschen Ergebnis ("V-Aufgaben": Es sind Verhältnisüberlegungen notwendig, die über den Vergleich zweier Größen hinausgehen). Nur diese Aufgaben können den Übergang zu einem höheren kognitiven Niveau anzeigen.

(4) Testaufgaben

Der Test besteht aus 15 Items, bei jedem sind drei Auswahlmöglichkeiten für die Antwort vorgegeben. Zu vergleichen sind jeweils Größenpaare - teils schwarz, teil weiß gefärbte Rechtecke - nach dem Anteil des Inhalts der schwarzen Fläche an dem der Gesamtfläche bzw. nach dem Verhältnis der Flächeninhalte der Teilflächen.

In der Abbildung 3.1 sind die Aufgaben verkleinert wiedergegeben.

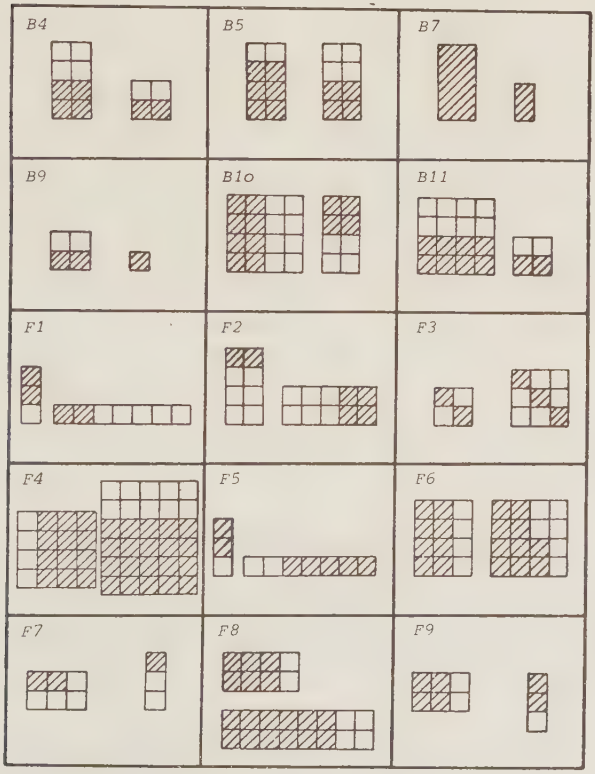


Abb.3.1: Testaufgaben der Untersuchung 1: "Spielfelder"

(5) Zur Auswahl der Versuchspersonen

Bei der Planung des Versuches wird eine grundsätzliche Schwierigkeit deutlich: Wollte man ein Stückchen kindlicher Entwicklung exakt verfolgen und Veränderungen aufdecken, müßte man "Längsschnittuntersuchungen" durchführen, in denen eine ausgewählte Personengruppe über mehrere Jahre hindurch beobachtet wird.
Solche Untersuchungen kann man wohl planen, kaum aber realisieren. Sie setzen die Möglicheit voraus, eine größere Anzahl von Kindern etwa vom 5. bis zum 15. Lebensjahr in einen Versuch einzubeziehen. Dies ist praktisch undurchführbar, und so ist es kein Zufall, daß Untersuchungen dieses Typs zwar in der Literatur diskutiert werden, in den Erziehungswissenschaften aber nur selten zu finden sind. Zudem würde ein solches Vorgehen kaum die Frage beantworten, welche der zahllosen Einflüsse und Faktoren denn nun für die mehr oder weniger erfolgreiche Entwicklung einzelner Fähigkeiten verantwortlich sind. Es ist eine gewiß faszinierende Frage, ob etwa spezifische Erfahrungen, die das Kind in frühem Alter macht, seine weitere Entwicklung nachhaltig und langfristig steuern oder beschleunigen können. Allerdings führt sie leicht in den Bereich der Spekulationen, wenn man bedenkt, daß es eine Unzahl von solchen Einflüssen - oberflächliche und tiefgreifende, erkennbare und verborgene, gezielte und ungezielte - gibt, die möglicherweise wirksam werden können.

Der übliche Ausweg aus diesem Dilemma besteht darin, von diesen Längsschnittuntersuchungen auf "Querschnitte" auszuweichen. Man greift Stichproben aus verschiedenen Altersklassen heraus und versucht aus den beobachteten Unterschieden Rückschlüsse auf mögliche Entwicklungsvorgänge zu ziehen.
Die Versuchspersonen, die in unsere Untersuchung 1 einbezogen werden, sind so ausgewählt, daß sie Altersstufen

vertreten, in denen charakteristische Fortschritte in der kognitiven Entwicklung zu vermuten sind. Wir haben uns dabei an den von PIAGET angegebenen Stadien kognitiver Entwicklung und den Zeitpunkten für die Übergänge zwischen ihnen orientiert. Nach den in Abschnitt 2.1 skizzierten Überlegungen hängt die Entfaltung des Verhältnisdenkens eng mit dem Erreichen des Stadiums formaler Operationen zusammen. Aus diesem Grunde haben wir die Mehrzahl unserer Kinder so gewählt, daß sie sich kurz vor oder in dem Übergang zu diesem Stadium befinden. Es werden zwei Klassen des 6. Jahrgangs (Alter 11 - 13 Jahre) und eine Klasse des 3. Jahrgangs (Alter 9 - 10 Jahre) untersucht, dazu Vorschulkinder (Alter 5 - 6 Jahre). Die jüngste Gruppe kann allerdings nur sehr wenig Aufschlüsse bringen. Bei der Wahl der älteren Kinder kommt eine zusätzliche Randbedingung dadurch hinzu, daß spätestens im 6. Schuljahr in allen Schulformen Bruchrechenkurse einsetzen und wir die Kinder auf jeden Fall vor diesem Zeitpunkt erfassen müssen, wenn wir nicht die unterschiedlichsten, schwer überschaubaren Lerneffekte als Störungen in Kauf nehmen wollen.

(6) Zur Testdurchführung

Der Test ist mit den jüngsten Kindern als Einzeltest durchgeführt worden. Mit jeweils zwei Kindern wurden die Aufgaben etwa eine halbe Stunde lang durchgespielt. Abwechselnd durfte eins der Kinder als erstes eins der beiden vorgelegten Spielfelder wählen, das andere Kind spielte mit dem zweiten Feld. Beide Felder wurden dann in je einen passenden Pappkarton gelegt, in diese warfen die Kinder ihre Kugel, die Spielkästen wurden zugedeckt und geschüttelt. Blieb die Kugel danach auf einem schwarzen Flächenstück liegen, erhielt der Spieler eine Gewinnmarke. Jedes Spielfeldpaar wurde zweimal vorgelegt, so daß jedes Kind einmal das seiner Meinung

nach bessere Kästchen wählen konnte. Nur diese Entscheidung wurde protokolliert. Mit den übrigen Kindern führten wir den Test als Gruppentest durch. Die Dauer betrug jeweils etwa eine Stunde. Der in der Testanweisung beschriebene Spielvorgang wurde lediglich an einigen Beispielen illustriert. Dabei wurde auch das Problem diskutiert, daß man durchaus nicht wissen kann, wo die Kugel liegen bleibt, wohl aber überlegen kann, welcher Ausgang des Versuchs am ehesten zu erwarten ist.

3.1.2 Ergebnisse

3.1.2.1 Allgemeine Befunde

(1) Konsistenzanalyse

In den einzelnen Versuchsgruppen fallen die Konsistenzkoeffizienten (nach KUDER-RICHARDSON, vgl. LIENERT, 1969, S. 228) sehr unterschiedlich aus. Am niedrigsten (etwa 0,2) ist die Konsistenz bei den Vorschulkindern. Dies kann nicht verwundern. Die jüngsten unserer Versuchspersonen haben sich beim Lösen der Aufgaben im wesentlichen an der jeweils dunkel gefärbten Fläche orientiert, ein Verfahren, das kaum eine besondere Zuverlässigkeit beanspruchen kann. So werden wir auch ihre Ergebnisse im folgenden nur gelegentlich heranziehen. Durch sie läßt sich lediglich der "Nullpunkt" des Begriffsbildungsprozesses verdeutlichen. Für die drei älteren Gruppen (GS, HS, GY) erhält man insgesamt eine innere Konsistenz $r_{tt} = 0{,}72$, für die Teilgruppen liegt sie allerdings wesentlich darunter (um 0,5). Damit ist sichergestellt, daß unser Test für erste Aussagen über Vorgänge und Probleme bei der Entwicklung des Verhältnisdenkens durchaus brauchbar ist, zumal diese Aussagen sich sämtlich nur auf Personengruppen, nicht auf Individuen beziehen.

(2) Übersicht über die Ergebnisse

Die Ergebnisse des Tests sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

	B 4	B 5	B 7	B 9	B 10	B 11	F 1	F 2	F 3	F 4	F 5	F 6	F 7	F 8	F 9
KG	0	60,0	0	35,0	0	0	60,0	75,0	45,0	10,0	85,0	20,0	0	0	0
GS	12,5	56,3	34,4	37,5	34,4	25,0	59,4	62,5	50,0	28,1	53,6	25,0	9,4	31,3	18,8
HS	29,6	77,8	33,3	48,1	29,6	22,2	48,1	74,1	29,6	22,2	55,6	29,6	3,7	29,6	11,1
GY	67,6	100,0	91,2	91,2	85,3	73,5	94,1	82,4	55,9	58,8	52,9	55,9	61,8	41,2	61,8

Tab. 3.1: Richtige Lösungen (in Prozent)

Die Ergebnisse zeigen ein zunächst recht verwirrendes Bild. Daran ändert sich auch nichts, wenn wir sie graphisch darstellen. (Abb. 3.2)

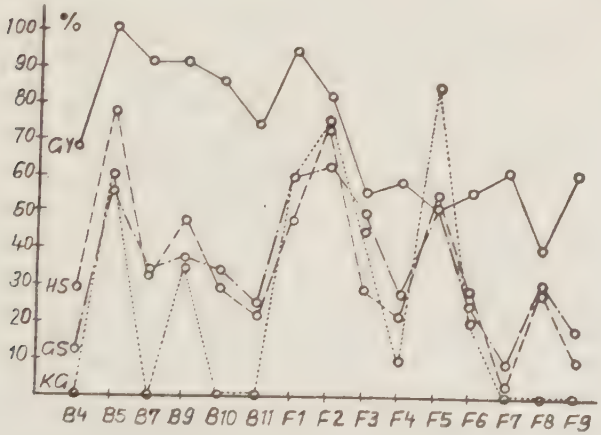


Abb.3.2: Richtige Lösungen für die einzelnen Testaufgaben

Es stellt sich heraus, daß einerseits zwischen den einzelnen Aufgaben erhebliche Unterschiede auftreten (auch bei solchen, die von FISCHBEIN u.a., 1970, in die gleiche Kategorie eingeordnet werden), daß zum anderen die Ergebnisse der verschiedenen Gruppen stark "durcheinandergeraten".

(3) Vergleich der Gruppenmittelwerte

Die Tabelle 3.2 enthält einige statistische Kennwerte für die am Versuch beteiligten Gruppen.

	n	Alter	$\bar{X}$	S	$\bar{X}_K$
Kindergarten	20	5;5	3,90	1,33	1,65
Grundschule 3. Klasse	32	9;0	5,41	1,98	3,69
Hauptschule 6. Klasse	27	12;4	5,44	2,34	2,63
Gymnasium 6. Klasse	34	11;7	10,74	1,84	8,38
HS und GY insgesamt	61	11;11	8,39	2,05	5,83

Tab. 3.2: Mittelwerte und Streuungen für die verschiedenen Gruppen

In der ersten Spalte ist die Zahl der Versuchspersonen angegeben, in der zweiten das Durchschnittsalter der erfaßten Kinder (Jahre;Monate) zum Zeitpunkt der Testdurchführung. Mittelwerte und Standardabweichungen für alle 15 Aufgaben sind in den Spalten 3 und 4 aufgeführt. Läßt man bei der Berechnung des Mittelwertes die Aufga-

ben fort, die zur richtigen Lösung nicht nur den schlichten Vergleich der schwarzen Flächenteile erfordern (B 5, F 2, F 5), so erhält man die in der letzten Spalte notierten korrigierten Mittelwerte $\bar{X}_K$.

(4) Überprüfung der Mittelwertdifferenzen

Aus dem Vergleich der Mittelwerte erhalten wir die ersten klaren - und zum Teil überraschenden - Aussagen. Die Nullhypothese

H_o: "Die Mittelwerte zweier Gruppen unterscheiden sich nicht"

kann man für alle Paare von Gruppen zurückweisen mit Ausnahme des Vergleichs zwischen den Grund- und Hauptschülern.

Mit dem parameterfreien[1] U-Test (vgl. CLAUSS-EBNER, 1967) erreicht man diese Signifikanz-Niveaus:

	KG	GS	HS	GY
KG	—	0,01	0,01	0,001
GS		—	n.s.	0,001
HS			—	0,001
GY				—

Tab. 3.3: Signifikanzniveaus zu den Vergleichen der Mittelwerte verschiedener Gruppen

Besonders auffallend ist der im Vergleich zu allen übrigen Differenzen besonders große Unterschied zwischen der GY- und der HS-Gruppe. Obwohl die Hauptschul-

---

1) Dieser parameterfreie Test wird verwendet, weil die Ergebnisse in einigen Gruppen nicht oder nur mäßig einer Normalverteilung angepaßt sind.

kinder im Durchschnitt etwa ein halbes Jahr älter sind als die Kinder der Quinta, erreichen sie nicht annähernd deren Leistungen, ja sie liegen sogar leicht unter den weitaus jüngeren Grundschulkindern. Daraus ergeben sich zwei Probleme:

- Es besteht die Gefahr, Unterschiede zu verwischen, wenn man sich allzu stark an Altersgruppen orientiert. Faßt man in unseren Ergebnissen HS- und GY-Gruppen zusammen, so liegen die Ergebnisse der so erhaltenen Altersklasse der Elf- bis Zwölfjährigen deutlich über denen der jüngeren Kinder. Die Interpretation wird zwar einfacher, aber auch ungenauer.
- Wir haben zwar keine Intelligenzdaten erhoben, dennoch erscheint die Annahme erlaubt, daß die Fähigkeit zur Verhältniserfassung eng von dem Entwicklungsstand allgemeiner kognitiver Funktionen abhängt. (Dieser läßt sich natürlich nicht durch das Lebensalter erfassen.) Ob diese Entwicklung nun durch den Erwerb formaler Operationen gekennzeichnet wird oder nicht - in jedem Fall müssen wir innerhalb einer Altersgruppe mit Unterschieden rechnen, die weit größer sein können als die zwischen Gruppen mit erheblicher Altersdifferenz. Es gibt hochsignifikante Unterschiede zwischen den beiden Gruppen HS und GY mit etwa gleichaltrigen Kindern, andererseits aber keine nennenswerten Unterschiede zwischen den HS-Kindern und den etwa drei Jahre jüngeren Kindern aus der Grundschule.

3.1.2.2 Analyse der Einzelergebnisse

Der Versuch, die vorliegenden Ergebnisse im einzelnen zu interpretieren, bereitet einige Schwierigkeiten.

Behält man die Aufschlüsselung nach B-Aufgaben und F-Aufgaben (in den drei von FISCHBEIN und Mitarbeitern

definierten Kategorien) bei, so ergeben sich die in Tab. 3.4 notierten Prozentsätze richtiger Lösungen.

	B	F 1 - 3	F 4 - 6	F 7 - 9
KG	15,8	60,0	38,3	0,0
GS	33,4	57,3	35,4	19,8
HS	40,1	50,1	35,8	14,8
GY	84,8	77,5	55,9	54,9

Tab. 3.4: Ergebnisse, aufgeschlüsselt nach Versuchsgruppen und Aufgabentypen (in Prozent)

Die graphische Darstellung gibt Abb. 3.3.

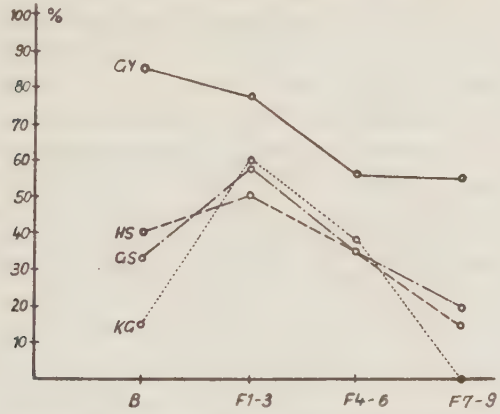


Abb.3.3: Graphische Darstellung der Ergebnisse aus Tab. 3.4

Auch in dieser Zusammenstellung wird ersichtlich, daß die Ergebnisse der GY-Gruppe deutlich über den übrigen liegen. Die anderen drei Gruppen jedoch bieten ein sehr uneinheitliches Bild.

- Die jüngsten Kinder zeigen die größten Schwankungen, die in den Einzelergebnissen (Tab. 3.4) noch deutlicher werden als bei der Zusammenfassung der Aufgaben zu Klassen. So erhält man in Abb. 3.3 "Leistungsspitzen" vor allem bei den Aufgaben F 2 und F 5, bei denen die Ergebnisse der Kindergartenkinder z.T. sogar deutlich über denen der GY-Gruppe liegen. Die genannten Aufgaben sind aber (neben B 5) gerade die, bei denen die größere schwarze Fläche zugleich auch den größeren Anteil an der Gesamtfläche ausmacht. Die Kinder kommen also hier durch bloßen Flächenvergleich zur richtigen Antwort - Verhältnisvergleich ist nicht notwendig und wird allenfalls vorgetäuscht.

- So ist es nicht verwunderlich, daß die Ergebnisse der Aufgaben F 2 und F 5 nicht nur in der KG-Gruppe, sondern auch bei den GS- und HS-Gruppen stark von denen der anderen Aufgaben der gleichen Klasse abweichen und mit Ausnahme von F 2 in der Grundschule signifikant höher liegen als ihre Partneraufgaben aus der gleichen Kategorie (χ^2-Test; $\alpha < 0{,}05$).

- Damit ist die von FISCHBEIN u.a. (1970) vorgenommene Klassenbildung nicht mehr haltbar. Dabei nämlich werden Aufgaben als äquivalent angesehen, zwischen denen erhebliche Unterschiede im Schwierigkeitsgrad bestehen, die zum Teil weit größer sind als die zwischen Aufgaben verschiedener Kategorien. Ein solches Vorgehen erleichtert die Interpretation keineswegs.

- Auffallend ist, daß die Aufgaben F 2 und F 5 bei der GY-Gruppe die erwähnten starken Abweichungen von den anderen Aufgaben der jeweiligen Kategorie nicht zeigen. Besonders deutlich wird das bei F 5. Während die Ergebnisse für dieses Item in allen anderen Gruppen weit über den "Nachbaraufgaben" liegen, erhalten wir in der GY-Klasse für die drei Aufgaben fast

gleiche Ergebnisse. Diese Tatsache ist zunächst überraschend, da hier - bei einer für die übrigen Kinder besonders "leichten" Aufgabe - die Leistungen der GY-Kinder bei oder gar unter denen der anderen Gruppen liegen. Keineswegs stellt für sie die Tatsache, daß der Verhältnisvergleich nur den Vergleich der schwarzen Teilflächen erfordert, eine Hilfe dar. Eine Antwort ist nicht aus der statistischen Analyse zu erhalten, wohl aber kann uns diese Beobachtung zu einer Hypothese führen, die unsere weiteren Überlegungen und Untersuchungen leiten wird: Die entscheidenden Schritte bei der Entwicklung des Verhältnisbegriffs bestehen in der Loslösung von der Bindung an eine (oder einzelne) der vorgegebenen Größen und in der Integration aller dieser Größen in ein neues kognitives Schema (zunächst qualitativ, dann auch zunehmend quantitativ). Von dieser Vermutung ausgehend, ist es verständlich, daß die Ergebnisse genau bei den Aufgaben (F 2 und F 5) in die Höhe schnellen, bei denen der Vergleich der schwarzen Flächen allein zur richtigen Lösung führt - und dieser Effekt wird gerade umso deutlicher, je geringer ein echtes Verhältnisdenken bereits ausgebildet ist. Umgekehrt: Die GY-Kinder, die offenbar schon bemüht sind, alle Größen in ihre Entscheidung einzuarbeiten (insbesondere etwa bei F 5 erkennen, daß das eine Feld zwar mehr Schwarz, aber zugleich auch mehr Weiß enthält), werden in ihrem Urteil unsicher. Sie zeigen geradezu eine Scheu, es sich so einfach zu machen, nur dem Merkmal Schwarz zu folgen. Die Ergebnisse der Aufgaben F 2 und F 5 deuten daher durchaus keinen Rückschritt im Verhältnisdenken an, sondern nur, daß die Überlegungen bei einem Teil der Kinder inzwischen so differenziert sind, daß sie sich nicht mehr von isolierten Einzelaspekten leiten lassen, auch wenn diese in speziellen Fällen zum Ziel führen. (Aufgaben, die wie F 2 und F 5 Fortschritte im Verhältnisdenken lediglich vortäuschen,

müssen offenbar mit besonderer Vorsicht interpretiert werden.)

- Diese Deutung deckt sich gut mit den Beobachtungen von BRUNER/KENNEY, daß die Häufigkeit widersprüchlicher Urteile mit zunehmendem Alter kleiner wird: Das Denken wird konsistenter, die Kinder sind auf dem Wege zu einem Gleichgewicht zwischen den zahlreichen sich zunächst widersprechenden Entdeckungen. Wie dieser Prozeß im einzelnen aussieht, wird in der Untersuchung 2 genauer analysiert.
Die Vermutung, daß es bei der Ausbildung des Verhältnisbegriffs entscheidend um die Loslösung von einzelnen Größen oder Größenpaaren geht (in unseren Aufgaben insbesondere von den schwarzen Teilflächen), läßt sich durch den Vergleich der Häufigkeiten stützen, mit denen die Kinder in den einzelnen Aufgaben das Feld mit der größeren schwarzen Fläche auch für das bessere halten. (Vgl. Tab. 3.5.)

	Aufgaben außer F 1	Aufgaben außer B 5,F 1,F 2,F 5
KG	71,7	70,0
GS	42,7	39,2
HS	53,6	52,8
GY	25,7	13,4

Tab. 3.5: Häufigkeit von Entscheidungen für das Feld mit der größeren schwarzen Teilfläche (in Prozent)

In der ersten Spalte ist der Anteil der Entscheidungen für mehr Schwarz bei allen Aufgaben angegeben, ausgenommen wurde nur F 1, bei der die schwarzen Flächen gleichen Flächeninhalt haben. Aufschlußreicher sind die Angaben in Spalte 2, bei denen auch die Aufgaben

unberücksichtigt geblieben sind, bei denen die Entscheidung für mehr Schwarz zur richtigen Antwort führt (B 5,F 2,F 5). Die Anzahl der Mehr-Schwarz-Entscheidungen ist in den einzelnen Gruppen sehr unterschiedlich, am höchsten in der KG-Gruppe, sehr niedrig in der GY-Gruppe. Die beiden anderen Gruppen liegen dazwischen, wobei die GS-Kinder bereits eine leichte Überlegenheit gegenüber den Hauptschülern zeigen[1]. Beide Gruppen erreichen zwar - wie wir oben gesehen haben - etwa gleiche Mittelwerte, jedoch gibt es Anzeichen dafür, daß in der HS-Gruppe die Fixierung auf Schwarz noch stärker ist als bei den etwa drei Jahre jüngeren Kindern.

Wir müssen hier auf eine eingehende Diskussion verzichten, werden aber den gestellten Fragen in der Untersuchung 2 gründlicher und mit einem genauer auf sie abgestimmten Test nachgehen.

3.1.2.3 Versuche zur Neuordnung der Aufgaben

(1) Die geschilderten Ergebnisse legen es nahe, die Klassifikation der Testaufgaben neu zu durchdenken, zum einen, um die bisherigen Befunde leichter interpretieren zu können, zum anderen, um die folgenden Untersuchungen gezielter planen zu können.

Zunächst einmal fassen wir die beiden F-Aufgaben F 2 und F 5 zu einer neuen "Kategorie" zusammen und erhalten

---

1) Sämtliche Unterschiede sind signifikant.
(χ^2 -Test, $\alpha < 0{,}01$).

die in Tab. 3.6 und Abb. 3.4 dargestellten Ergebnisse.

	F 2/5	F 1/3	F 4/6	F 7-9
KG	80,0	52,5	15,0	0,0
GS	57,8	54,7	26,6	19,8
HS	64,9	39,9	25,9	14,8
GY	67,7	75,0	57,9	54,9

Tab. 3.6: Ergebnisse der F-Aufgaben nach korrigierter Kategorienbildung (in Prozent)

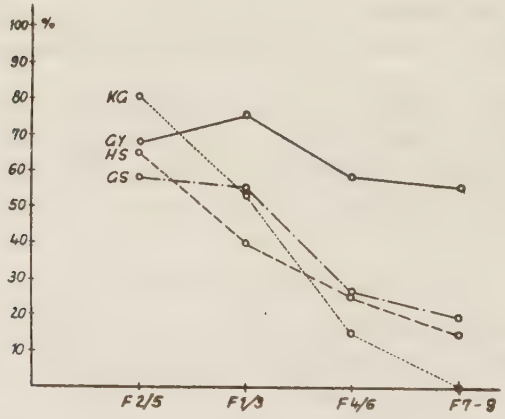


Abb.3.4: Graphische Darstellung der Ergebnisse aus Tab. 3.6

Hier wird nicht nur die unterschiedliche Leistungshöhe sichtbar, sondern vor allem auch das unterschiedlich starke "Gefälle", das die Leistungen der einzelnen Gruppen zeigen.

(2) Noch einen Schritt weiter bei der Interpretation der Ergebnisse kommen wir, wenn wir uns ganz von den FISCHBEIN-Kategorien lösen und die 15 Testaufgaben nach den Wahrnehmungshinweisen sortieren, die bei den Verhältnisvergleichen helfen oder stören. Dies führt zu den folgenden Aufgabentypen:

Typ A: Das Feld mit der größeren schwarzen Teilfläche ist das bessere (Aufgaben B5, F2, F5).

Typ B: Das Feld mit der größeren schwarzen Teilfläche ist schlechter (Aufgaben B9, F1, F3, F4, F6). Bei diesem Aufgabentyp bietet jedoch der Vergleich der weißen Flächen (bzw. der Gesamtflächen) eine Möglichkeit, zurrichtigen Entscheidung zu kommen. Dabei allerdings muß das Kind erkennen, daß die Chancen umso schlechter werden, je größer die weiße Restfläche ist. Diese Überlegung - auch wenn sie noch nicht quantifiziert wird - bedeutet sicherlich einen wesentlichen Fortschritt auf dem Wege zur Verhältniserfassung, da an dieser Stelle eine gewisse "Reziprozität" des Denkens notwendig wird: Änderung der Restfläche und des Verhältnisses verlaufen gegensinnig.

Typ C: Beide Felder bieten gleiche Chancen, obwohl weder die Teilflächen noch die Gesamtflächen gleich groß sind. Die Überlegungen können sich weder auf den Vergleich der schwarzen noch der weißen Flächenstücke allein stützen. (Aufgaben B4, B7, B10, B11, F7, F8, F9).

Diese Einteilung ist zwar gröber als die von BRUNER/ KENNEY, erfaßt jedoch die wesentlichen Aspekte besser. Faßt man die Aufgaben in der skizzierten Weise zusammen, so erhält man die Ergebnisse aus Tab. 3.7 bzw. Abb. 3.5.

	Typ A	Typ B	Typ C
KG	73,3	34,0	0,0
GS	57,3	40,0	23,7
HS	69,2	35,5	22,7
GY	78,4	71,2	68,9

Tab. 3.7: Ergebnisse der drei Aufgabentypen A, B, C (in Prozent).

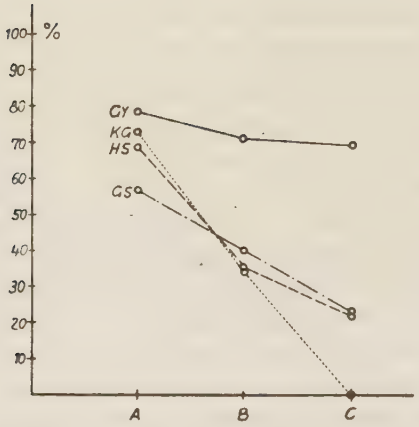


Abb.3.5: Graphische Darstellung der Ergebnisse aus Tab. 3.7

In dieser Darstellung wird sehr deutlich, daß die Versuchsgruppen sich nicht nur - wie oben erörtert - in den Mittelwerten richtiger Antworten unterscheiden, sondern fast stärker noch in dem Grad, in dem ihr Verhältnisdenken von den Wahrnehmungsstützen abhängt. Bei den jüngsten Kindern werden richtige Antworten im Typ B bereits recht selten und sind bei den C-Aufgaben überhaupt nicht mehr zu finden. (Allerdings kann die letzte Feststellung nur mit Vorsicht getroffen werden, da durch die enaktive Versuchsdurchführung und die damit verbundene Aufforderung, sich für eins der Spielfelder zu entscheiden, der Aspekt, daß zwei Felder durchaus gleich gut sein können, wohl etwas zu stark verdrängt wurde.) Im Gegensatz dazu ist bei den GY-Kindern die Abhängigkeit vom Aufgabentyp kaum noch zu beobachten. Die Ergebnisse bei den "leichten" und den "schweren" Aufgaben unterscheiden sich nur unwesentlich. Die beiden restlichen Gruppen zeigen auch bei dieser Aufbereitung der Ergebnisse ein zwischen diesen Extremen liegendes Verhalten. Ihre Erfolgsaussichten sinken deutlich in dem Maße, wie helfende Wahrnehmungseindrücke schwinden.

Insgesamt lassen diese Befunde den Schluß zu, daß eine unübersehbare Wechselwirkung zwischen Gruppen und Aufgabentypen vorliegt und sich das Denken der Kinder stark bezüglich der erreichten "Stabilisierung" unterscheidet. Die Fortschritte stellen sich - durchaus im Sinne der PIAGETschen Theorie - als Prozeß der Erlangung eines kognitiven Gleichgewichts dar.

3.1.2.4 Zusammenfassung der Ergebnisse und Präzisierung der Fragestellungen für die weiteren Untersuchungen

Es kann nicht überraschen, daß die skizzierte erste Untersuchung mehr offene Fragen als Antworten gebracht hat.

Dennoch können wir erste Ergebnisse notieren:

- Unser Test hat sich als brauchbar erwiesen, um deutliche Unterschiede bezüglich der Entwicklung des Verhältnisdenkens zwischen den vier Gruppen von Versuchspersonen aufzudecken.
- Dabei können - wie zu erwarten - Fortschritte mit zunehmendem Alter nachgewiesen werden. Diese hängen jedoch stark von der Auswahl der Gruppen ab. Erhebliche Unterschiede zwischen Gruppen mit etwa gleichem Durchschnittsalter sind ebenso zu finden wie annähernd gleiche Leistungen von Kindern sehr unterschiedlichen Alters.
- Bei der Analyse zeigen sich Wechselwirkungen zwischen Personengruppen und Aufgabentypen. Dies könnte Hinweise auf eine zunehmende Stabilisierung des Denkens liefern. (Vergleiche mit den Ergebnissen von BRUNER/KENNEY, 1971, bzw. FISCHBEIN u.a., 1970, stoßen allerdings auf Schwierigkeiten. Bei BRUNER/KENNEY finden sich keine Ergebnisse für einzelne Aufgaben, zudem wählen sie eine andere Fragestellung. FISCHBEIN erhält durchweg bessere Ergebnisse als wir.

Möglicherweise ist der Grund darin zu finden, daß er leistungsschwächere Kinder ausgeschlossen hat.)

Für das Weitere ergeben sich daraus zahlreiche neue Probleme. Die Leitfrage heißt: Wie kann man Fortschritte in der Entwicklung des Verhältnisdenkens genauer erfassen? Im einzelnen: Mit welchen Schwierigkeiten haben Kinder auf diesem Wege zu kämpfen? Wie überwinden sie diese Hürden? Gibt es Hinweise auf gewisse Stadien in der Entwicklung?

3.2 Analyse der Schwierigkeiten auf dem Wege zum Verhältnisbegriff (Untersuchung 2)

3.2.1 Ziele und Anlage des Versuchs

(1) Die Erfahrungen der ersten Untersuchung legen es nahe, den Schwierigkeiten nachzugehen, mit denen Kinder bei der Entwicklung des Verhältnisbegriffs zu kämpfen haben. Wie kann man diesen Begriffsbildungsprozeß genauer erkennen und beschreiben?
Gewiß kommen wir in dieser Richtung nicht dadurch weiter, daß wir die im letzten Abschnitt geschilderte Untersuchung nun mit einem aufwendigeren Test und einer größeren Anzahl von Versuchspersonen wiederholen. Ein solches Vorgehen böte wenig Chancen zur Beantwortung unserer Fragen. Stattdessen wählen wir in der Untersuchung 2 einen anderen Weg, bei dem wir Interviews mit einem einigermaßen objektiven Test koppeln, in der Hoffnung, auf diese Weise weder die Überlegungen der Kinder unter Tests zu verschütten noch uns andererseits nur auf wenige verbale Äußerungen stützen zu müssen. Es scheint gefährlich, ausschließlich Interview-Ergebnisse heranzuziehen, wie es etwa in vielen Untersuchungen PIAGETs geschieht. Es ergeben sich dabei zahlreiche Sprach- und Interpretationsprobleme, durch die Kinder und Untersucher leicht ins Straucheln geraten.

(Man vergleiche dazu die sehr harte Kritik FREUDENTHALs an dem Vorgehen PIAGETs, insbesondere an dessen Interviewtechnik:

> "Was in Wirklichkeit dann konstatiert wird, ist nicht eine Entwicklung der untersuchten Begriffe, sondern eine in der Gewandtheit in der Kommunikation. Natürlich bedeutet das nicht, daß es da keine Entwicklung der Begriffe gibt, sondern daß man sie nicht aus dem Bereich störender Faktoren isoliert hat." FREUDENTHAL, 1973, Bd. 1, S. 303)

(2) Zum Problem der Fragestellung

Auch in dieser Untersuchung geht es uns nicht um den Nachweis von Bruchrechenfertigkeiten oder anderen formalen Kompetenzen, sondern um das Verhalten von Kindern verschiedenen Alters in einfachen Situationen, in denen der Verhältnisaspekt zentral ist. Daß die Fragestellung keine aufwendigen verbalen Erläuterungen erfordert, bleibt eine wichtige Randbedingung. In der Untersuchung 1 erschien die Frage nach dem Anteil in einem Wahrscheinlichkeitsgewand. Damit kann nicht ausgeschlossen werden, daß durch probabilistische Aspekte spezifische Schwierigkeiten in den Test eingehen. Aus diesem Grunde verwenden wir in der zweiten Untersuchung Mischungsaufgaben. Möglicherweise sind Kindern solche Sachsituationen vertrauter als Wahrscheinlichkeitsprobleme. In jedem Fall aber können Fehlleistungen ihre Ursache nicht mehr in der stochastischen Einbettung der Testaufgaben haben. Der Vergleich der Ergebnisse beider Tests könnte uns Aufschlüsse darüber geben, welchen Einfluß die jeweils gewählte Fragestellung hat. Angeregt wurde diese Wahl des Aufgabentyps durch die schon mehrfach erwähnte Arbeit von BRUNER und KENNEY (1971). In dem von ihnen durchgeführten Experiment werden dem Kind zwei Gläser (oder Bilder von Gläsern) vorgelegt, beide je zu einem

Teil mit Wasser gefüllt, mit der Aufforderung zu entscheiden, welches Glas voller ist. Natürlich ist gemeint: "Welches Glas ist relativ voller", "zum größeren Teil gefüllt", "enthält mehr Wasser im Vergleich zum Gesamtvolumen"? Hier wird das Problem deutlich: Verwendet man exakte Fragestellungen dieser Art, so steckt man Begriffe schon hinein, deren Vorhandensein man ja gerade nachweisen will. Ist diese Begriffsbildung noch nicht vollzogen, woher soll das Kind dann über die entsprechenden verbalen Mittel verfügen? Oder - schlimmer noch - das Kind stolpert über diese Worte, obwohl es die kognitiven Strukturen, die erfaßt werden sollen, bereits ausgebildet hat und bei einer angemessenen Fragestellung durchaus erfolgreich wäre. Verzichtet man dagegen auf diese Formulierungen und bleibt bei der schlichten Frage, welches Glas voller ist, so sind Mißverständnisse geradezu eingebaut, und das Kind wird provoziert, "voller" mit "mehr Wasser" zu identifizieren. Ein "unverdorbenes" Kind wird sich natürlich für das Glas mit der größeren Flüssigkeitsmenge entscheiden - wenn es etwa möglichst viel Saft zur Löschung seines Durstes erhalten möchte. Es ist nicht fair, diese Entscheidung dann als falsche Antwort zu verbuchen.

Um diesen Schwierigkeiten zu entgehen, haben wir die folgende Aufgabenstellung gewählt:

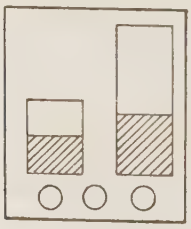


Abb.3.6: Beispiel einer Testaufgabe

"Zwei Gläser sind je teilweise mit Himbeersirup gefüllt. Beide werden bis zum Rand mit Wasser aufgefüllt. Welcher Saft wird süßer? (dicker? roter?)" Diese Frage ist unmißverständlich und hat sich auch für Kinder im Vorschulalter als brauchbar erwiesen.

(3) Versuchsablauf

Es wurden je rund 30 Kinder in drei Altersgruppen (Vorschule, Grundschule 3. Klasse, Realschule 6. Klasse) einzeln untersucht. Das Durchschnittsalter betrug 5;10, 9;8 bzw. 11;9 Jahre. Die Realschulklasse wurde gewählt in der Hoffnung, so eine brauchbare Stichprobe der Elf- bis Zwölfjährigen zu haben. Der Wahrscheinlichkeitstest nämlich hat gezeigt, daß die Leistungsunterschiede zwischen Hauptschülern und Gymnasiasten gleichen Alters viel größer waren als zwischen Haupt- und Grundschülern. Es sei erwähnt, daß auch in der Realschulklasse zum Zeitpunkt der Testdurchführung noch keine Unterrichtseinheit Bruchrechnung stattgefunden hatte.

Der Test ist eine Kombination aus Auswahl-Antwort-Verfahren und Interview. Auf der einen Seite gilt es, so viel wie möglich über das Denken des Kindes zu erfahren. Dies kann nur gelingen, wenn wir die Kinder über ihre Lösungsversuche und Schwierigkeiten sprechen lassen. Auf der anderen Seite aber kommen wir über Vermutungen, Ideen, Hinweise nur dann hinaus - evtl. bis zu statistisch abgesicherten Ergebnissen -, wenn wir objektiv überprüfbare Antworten erhalten. Das Kind wurde daher zunächst aufgefordert, das Glas mit dem süßeren Saft anzukreuzen bzw. sein Kreuz in die Mitte zu setzen, wenn es der Meinung war, daß der Saft in beiden Gläsern gleich süß wird. Wichtige Anmerkungen, Fragen und Begründungen der Kinder haben wir zusätzlich protokolliert.

(4) Übersicht über die Testaufgaben

Der erste Teil umfaßt vierzehn Aufgaben der beschriebenen Art, je sieben, bei denen eins der Gefäße zur Hälfte bzw. zu einem Drittel mit Sirup gefüllt ist

(im folgenden kurz als $\frac{1}{2}$ -bzw. $\frac{1}{3}$ -Aufgaben zitiert). Die Aufgaben sind in Abb. 3.7 zusammengestellt. In jedem Item wird ein Gläserpaar vorgelegt, das aus dem links angegebenen Glas und einem der Gläser 1 bis 7 besteht.

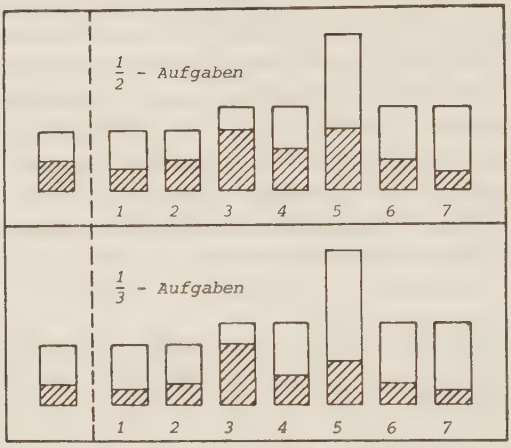


Abb.3.7: Im Teil 1 des Tests verwendete Aufgaben

Im zweiten Teil wird die Frage umformuliert:
Ein Musterglas ist vorgegeben. Das Kind wird aufgefordert, in ein anderes Glas so viel Sirup einzufüllen, daß der Saft darin gleich süß wird. Auch dieser Teil enthält $\frac{1}{2}$ -und $\frac{1}{3}$ -Aufgaben. (Abb. 3.8)

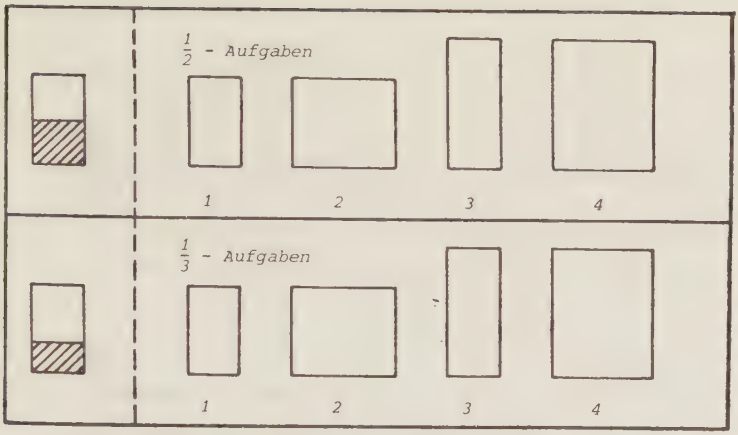


Abb.3.8: Einfüllaufgaben (Teil 2 des Tests)

Der dritte Teil soll die Frage beantworten helfen, ob den Kindern die Entscheidung leichter fällt, wenn die Verhältnisüberlegung durch die Aufgabenstellung bereits nahegelegt wird. Wir haben daher Meßgläser verwendet, bei denen man ablesen kann, daß der Sirup z.B. nur bis zum ersten von drei äquidistanten Meßstrichen reicht. Als Meßglasaufgaben haben wir nur die Aufgaben 4, 5 und 6 des ersten Teils übernommen, die man nicht durch bloßen Sirupvergleich lösen kann. Unter diesen finden sich neben den bereits erwähnten $\frac{1}{3}$-Aufgaben zusätzlich noch die drei entsprechenden $\frac{2}{3}$-Aufgaben. (Abb. 3.9) Möglicherweise können sie uns Auskünfte darüber geben, ob Kinder bereits Überlegungen zeigen, die auf eine Koppelung von Teilungs- und Vervielfachungsprozessen hindeuten.

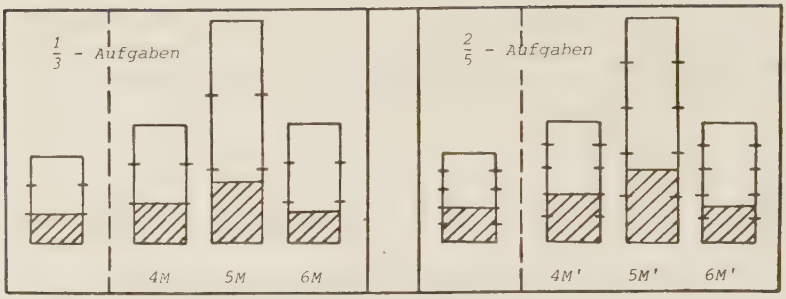


Abb.3.9: Meßglasaufgaben (Teil 3 des Tests)

(5) Insgesamt ist dieser zweite Test sehr viel vorsichtiger konzipiert als sein Vorgänger. Im ersten Anlauf waren wir noch optimistisch - so könnte man die Entwicklung des Verhältnisbegriffs messen, wie man etwa Körperhöhen mißt. Die Aufgaben waren sehr inhomogen, und so ist es nicht verwunderlich, daß auch die Ergebnisse z.T. diffus und nur schwer interpretierbar sind. Durch diese Erfahrungen gewarnt, ist der zweite Test erheblich bescheidener geplant, um so wenigstens einige Aspekte des komplexen Prozesses der Begriffsgenese erfassen zu können. Natürlich hat dies zur Folge, daß wir in den Interviews nur einen kleinen Ausschnitt aus dem Spektrum kindlichen Denkens beobachten können, und auch der statistischen Analyse sind enge Grenzen gesetzt. Wir haben die Aufgaben jedoch so ausgewählt, daß zu ihrer Lösung jeweils spezifische Denkmuster notwendig sind, die für bestimmte Stadien kognitiver Entwicklung charakteristisch sein könnten.

(6) Die Reliabilität des Tests (Teil 1), berechnet nach der Formel von HORST für die Konsistenzschätzung (vgl. LIENERT, 1969, S. 228), beträgt $r_{tt} = 0{,}66$. Auch dieser relativ niedrige Wert ist wohl in erster Linie darauf zurückzuführen, daß wir nur wenige Aufgaben ausgewählt haben.

3.2.2 Auszüge aus den Interviews

3.2.2.0 Vorbemerkungen

Die Interviews haben wir mit den Vorschul- und Grundschulkindern im Juni 1973, mit der Realschulgruppe im Oktober 1973 durchgeführt.
Wir können hier natürlich nur Auszüge wiedergeben, in denen typische Überlegungen und Schwierigkeiten sichtbar werden. Auf diese Weise erhoffen wir uns Einblicke in das Denken der Kinder - nicht mehr und nicht weniger. Weder sollte man die Ergebnisse als irrelevant abtun, weil sie notwendigerweise lückenhaft und nicht statistisch abgesichert sind, noch darf man sie andererseits überschätzen und die Antworten der Kinder allzu schnell verallgemeinern und mit eigenen Interpretationen überladen. Zwar haben wir die Fragen im Hinblick auf mögliche Stufen im Denken der Kinder ausgewählt, dennoch erscheint es gefährlich, die Kinder in vorher definierte Kategorien, Stadien, Niveaus hineinzuzwängen. Zunächst einmal besteht unser Ziel darin, den Kindern zuzuhören. Dadurch wird der Stellenwert der Interviews charakterisiert. Sicher geben sie keine endgültigen und gesicherten Antworten auf unsere Fragen. Wohl aber können sie uns helfen, unsere Sensibilität für die kindlichen Überlegungen zu steigern und so zu genaueren Hypothesen zu gelangen. In diesem Sinne sollten sie nicht unabhängig von der anschließenden statistischen Analyse gesehen werden.

Eine Anmerkung zur Notation: Die Bezeichnungen der Aufgaben, die im folgenden gewählt werden, stimmen mit denen in den Abbildungen des Abschnitts 3.2.1 überein. Zur Kennzeichnung der Meßglasaufgaben sind den Nummern die Indizes M (bei den $\frac{1}{3}$-Aufgaben) bzw. M' (bei den $\frac{2}{5}$-Aufgaben) angefügt.

3.2.2.1 Interviews Kindergarten

Die Schilderung der Interviews mit den jüngsten Kindern können wir sehr kurz fassen, da sie im wesentlichen die bereits in der Untersuchung 1 erhaltene Feststellung bestätigen, daß Kinder dieses Alters (etwa 6;6 Jahre) allenfalls schwache Ansätze von Verhältnisüberlegungen zeigen, und daher nicht besonders ergiebig sind. Typisch für die Mehrzahl dieser Kinder sind Entscheidungen, die sich nur auf den Vergleich der farbigen Teilflächen ("Sirup") stützen. Nur wenn diese gleich groß sind, nimmt das Kind die Wassermengen zu Hilfe. Insgesamt aber kommt es so über Größenvergleich nicht hinaus, es vergleicht Volumina, nicht aber Mischungen. Umso interessanter ist, daß einige wenige Kinder bereits in der Lage sind, sich von diesem einfachen Denkschema zu lösen.

SONJA (6;3) etwa begründet ihre Überlegungen zu Aufg. 5 so: "Hier ist mehr Sirup, aber viel mehr Wasser als dort" - und damit in einer Weise, die wie erst bei den älteren Kindern erwarten und dort auch häufig antreffen werden. Bei den Einfüllaufgaben ($\frac{1}{2}$) gebraucht sie sogar Begriffe wie "die Hälfte Wasser" richtig und kommt mit ihrer Hilfe zum Ziel. So wundert es nicht mehr, wenn sie in Aufg. 2 versucht, das große Glas durch das kleine geschickt auszumessen und auf diese Weise zu einer "Klassenbildung" zu gelangen. Ihre Antworten zeigen die Streubreite der Überlegungen innerhalb einer Altersgruppe, die so weitreichend sein kann, daß einzelne Vorschulkinder über kognitive Strategien verfügen, die manchen Kindern der 6. Klasse durchaus noch fehlen.

Gerade in dieser Gruppe stellt sich natürlich die Frage, ob die Schwierigkeiten nicht zu einem großen Teil im mangelnden Verständnis der Sachsituation begründet sind. Um dies herauszufinden, haben wir die

Kinder vor Testbeginn gefragt, was passiert, wenn man den Saft durch mehr Sirup bzw. mehr Wasser auffüllt. Zu unserem Erstaunen gaben alle Kinder Antworten, aus denen hervorging, daß die Situation von ihnen erfaßt wurde. Sinngemäß erklärten sie: "Gießt man mehr Sirup hinzu, wird der Saft süßer (roter, dicker), gießt man Wasser dazu, wird er dünner (heller, 'saurer')."
Die gleichen Kinder allerdings stützen kurz darauf jedoch ihre Urteile nur auf den Vergleich zweier Größen. Es ist also durchaus nicht so, daß die Süße der Mischung lediglich als eine Funktion der einen Variablen Sirupvolumen angesehen wird. Die Kinder scheitern jedoch bei dem Versuch, dann auch mehrere Variablen zu verarbeiten. Die Ergebnisse geben insgesamt wenig Rätsel auf. Die Kinder dieser Altersstufe sind noch mit weit "einfacheren" Problemen beschäftigt, mit der Bildung solcher Begriffe wie Länge, Flächeninhalt, Zahl. Das steht im Einklang mit einschlägigen Aussagen der Entwicklungspsychologie.

2.2.2 Interviews Grundschule (Klasse 3)

Die Grundschulinterviews sind besonders aufschlußreich, da sich in ihnen ein außerordentlich breites Spektrum von Überlegungen zeigt. Sie reichen von einer noch vollständigen Fixierung auf einzelne Größen, die für die Vorschulkinder charakteristisch ist, bis hin zu schon sehr komplexen Formen des Verhältnisdenkens.

JUTTA (10;4) versucht die Problemlösung in einer so einfachen Weise, wie sie bei den Grundschulkindern sonst kaum noch anzutreffen ist. Bei sämtlichen Vergleichen richtet sie sich ausschließlich nach der Sirupmenge, sogar bei den vier Aufgaben mit gleichen Sirupmengen in verschieden hohen Gläsern. Selbst mehrfache Hinweise daß wir nach der Süße vergleichen wollen, helfen nicht

weiter. Bei den Einfüllaufgaben ist sie ebenso fest auf die Höhe der Sirupsäule fixiert.

Wie mühsam manche Kinder einen auch nur kleinen Schritt vorankommen, verraten auch die nächsten Gespräche.
TANJA (9;10) geht zunächst einmal genau so vor wie JUTTA. Bei allen Vergleichsaufgaben scheint für sie nur die Sirupmenge als relevante Größe zu existieren, bei den Einfüllaufgaben die Siruphöhe.
Etwas sehr Überraschendes geschieht, als der Versuchsleiter bei ihren Einfüllversuchen die Frage stellt, ob es denn nur am Sirup liegt, wie süß der Saft wird. (Hier sieht man allerdings auch die Gefahr von Zwischenfragen: Sie können ebenso verwirren wie mögliches Lernen in Gang setzen. Wir haben solche Fragen deshalb nur in sehr seltenen Fällen eingestreut, etwa wenn wie hier bei TANJA die Überlegungen des Kindes klar sind und keine neuen Erkenntnisse mehr versprechen.) Auf die genannte Frage antwortet TANJA zunächst vorsichtig und undurchsichtig: "Nein, etwas liegt das auch am Wasser." Um diesem "etwas" näherzukommen, zeichnet der Versuchsleiter auf den Rand des Testheftes ein extrem hohes Glas, darin die Sirupmenge wie im Musterglas. Nun ist auch TANJA überzeugt, daß dieser Saft nicht so süß wird, weil offensichtlich allzu viel Wasser ins Glas gefüllt werden kann. Wieviel Sirup soll denn nun ins Glas? Daraufhin zeichnet TANJA so, daß sich in beiden Gläsern gerade die gleiche Wassermenge befindet. Bei den weiteren Aufgaben ist allein dieses neu gewonnene Kriterium dominierend. Ein "Gleichgewicht" zwischen Wasser- und Sirupmenge stellt sich nicht ein.

MARTINA (10;5) zeigt trotz ihres relativ hohen Alters ebenfalls noch die typischen Lösungsversuche jüngerer Kinder. Durchgehend entscheidet sie sich schlicht nach

der Sirupmenge, nur bei der Aufgabe 6 bezieht sie die Größe der Gläser ein: "Das Glas ist ja größer, darum wird der andere Saft süßer." In allen anderen Fällen ist nicht einmal der Versuch erkennbar, mehrere Aspekte zu berücksichtigen und qualitativ zu verarbeiten. Nur ihr Zögern bei einigen Antworten verrät, daß sie diese überhaupt wahrnimmt. Bei den Meßglas-Aufgaben allerdings beobachten wir ein differenzierteres Lösungsverhalten. Der deutliche Hinweis des Versuchsleiters auf die Striche scheint dazu zu führen, daß MARTINA nun Vergleiche wie "hier bis zum ersten Strich, dort nicht bis zum ersten Strich" favorisiert. An den Antworten zu den Einfüllungsaufgaben fällt auf, daß sie in drei Fällen "gleich süß" mit "gleiche Sirupmenge" identifiziert. Dies führt bei den Gläserpaaren mit gleicher Höhe, aber unterschiedlicher Breite dazu, daß gleich große Flächen eingefärbt werden[1].

MICHAEL (9;1) wählt ein Vorgehen, das typisch für viele der Grundschulkinder ist. Auch ohne weiteren Hinweis achtet er auf Sirup- und Wassermengen. Bei Aufg. 4($\frac{1}{2}$) zögert er noch, ob er der größeren Sirup- oder Wassermenge den Vorzug geben soll, "löst" den Konflikt aber schnell und kreuzt an: "Da ist mehr Wasser, also wird der andere Saft nicht so süß". (Die richtige Entscheidung wird in die Überlegungen überhaupt nicht einbezogen!)

Bei der folgenden Aufgabe 5 befindet sich im größeren Glas sogar "viel mehr Wasser" als im kleineren, also

---

1)Hier wie im folgenden lassen wir außer acht, daß natürlich in einem zylindrischen Glas bei einer Verdoppelung des Radius und gleichzeitiger Halbierung der Höhe das Volumen der Flüssigkeitssäule nicht gleich bleibt. Wir sind auf diese Frage in den Gesprächen nicht eingegangen. Wollte man dieses Problem umgehen, müßte man quaderförmige Gefäße gleicher Tiefe wählen.

Wird der Saft im kleineren süßer - und fortan ist MICHAEL vom Kriterium Wassermenge nicht mehr loszubekommen. Er hat eine Regel entdeckt und formuliert, die ihn nicht in weitere Konflikte bringt. Von dieser rückt er auch bei den Meßgläsern nicht mehr ab.

Bei den Einfüllaufgaben zeigt MICHAEL eine andere interessante Fixierung. Zunächst zeichnet er bei den $\frac{1}{2}$ -Aufgaben den Strich richtig in halber Höhe, ebenso aber auch bei den $\frac{1}{3}$ -Aufgaben! Er begründet dies sogar: "Der Sirup muß genau bis zur Mitte, dann ist ja die Hälfte Wasser da, und es wird gleich süß." Das Vergleichsglas hat er ganz vergessen, "gleich süß" wird mit "gleichen Teilen Wasser und Sirup" identifiziert. Erst als wir ihn auf das Musterglas hinweisen, setzt er seinen Strich etwas tiefer.

Während in den bisherigen Interviews Fortschritte durch Fixierung auf einen Aspekt - oder auch auf mehrere Aspekte , die die Kinder jedoch sukzessiv und jeweils unter Ausschluß anderer betrachten - blockiert werden, sind in den nächsten erstmals Bemühungen erkennbar, die verschiedenen Daten gleichzeitig gedanklich zu verarbeiten.

IRA (9;1) verrät deutliche Ansätze von Verhältnisdenken. Zwei zur Hälfte gefüllte Gläser erkennt sie als gleich süß. Und bei Aufgabe 5($\frac{1}{2}$)präzisiert sie ihre Überlegungen: "Links ist zwar weniger Sirup, aber das ist für das kleinere Glas ja viel." Allerdings geht dieser Entwicklung ein längeres Hin und Her voraus: Zunächst entscheidet sich IRA für das rechte Glas, will dann in der Mitte ankreuzen, und erst im dritten Versuch setzt sie ihr Kreuz - richtig - links. Es scheint, als traue sie ihrer eigenen Überlegung nun doch nicht so ganz: Bei den entsprechenden $\frac{1}{3}$ -Aufgaben fällt sie wieder in Entscheidungen zurück, die auf Vergleich der Sirupmengen

beruhen. Auch die Meßstriche helfen ihr nicht wesentlich weiter. Zwar entscheidet sie sich etwa in der Aufg. 4M' für "gleich süß", doch als wir versuchen, ihr eine Begründung zu entlocken, betont sie sogar: "Nein, an den Strichen kann man das nicht sehen." So ist es nicht verwunderlich, daß diese richtige Lösung eine Ausnahme bleibt.
Noch deutlicher wird IRAs Unsicherheit bei den Einfüllaufgaben. Entweder setzt sie den Strich in die Mitte (auch bei den $\frac{1}{3}$ -Aufgaben) oder wählt sogar - ziemlich willkürlich - irgendein anderes Kriterium. So etwa zeichnet sie in Aufg. 3 den Flüssigkeitsspiegel genau in Höhe des oberen Randes des kleineren Glases ein und beschreibt dieses Vorgehen auch verbal. Von Verhältnisüberlegungen allerdings ist dabei keine Spur mehr zu entdecken. (Charakteristisch für Grundschulkinder ist jedoch, daß sie Regeln angeben und sich ihnen gemäß entscheiden - Regeln, die in vielen Fällen allerdings ad hoc erfunden oder entdeckt werden. Auf die Rolle angemessener Regeln für den Prozeß der Begriffsbildung sind wir in Kap. 2 eingegangen.)

ARNDT (9;9) orientiert sich zunächst durchgehend an der größeren Sirupmenge. Dann wird er stutzig, als gleich viel Sirup in verschieden hohen Gläsern eingefüllt ist (Aufg. 6). Zunächst entscheidet er sich für "gleich süß", korrigiert sich aber und kommt zur richtigen Antwort. Bei der entsprechenden $\frac{1}{3}$ -Aufgabe ergeben sich keine Schwierigkeiten mehr.
Sehr aufschlußreich sind ARNDTs Überlegungen bei den $\frac{1}{3}$ -Aufgaben 4 und 5. Bei Aufgabe 5 ist die Sache für ihn klar. Im rechten Glas ist "ganz viel Wasser", also wird der Saft dort weniger süß. Aufgabe 4 bereitet mehr Schwierigkeiten. A. überlegt: Zuerst will er sich für das größere Glas entscheiden: "Da ist mehr Sirup drin.

Nein, doch nicht. Da (links) ist aber weniger Wasser..." Nach einigem Nachdenken setzt er sein Kreuz in die Mitte und begründet: "Beides wird gleich, da ist mehr Sirup und mehr Wasser, da weniger Sirup und weniger Wasser." Daß dieses auf einfachen Konjunktionen beruhende Denken nicht immer weiterhilft, wird bei den Meßglasaufgaben deutlich. Für Aufg. 4M zieht A. nicht etwa Zahlüberlegungen heran, sondern begründet sein Kreuz in der Mitte wörtlich so: "Das Glas ist zwar größer, aber da ist ja auch mehr Sirup." Doch schon bei der nächsten Aufgabe 5M führt dieses Vorgehen zur falschen Antwort! Die $\frac{2}{5}$-Aufgaben lassen erkennen, daß diese Überlegungen jedoch keinen Endpunkt markieren. Aufg. 4M' bringt ARNDT noch nicht in Konflikte, sie läßt sich mit den zuvor skizzierten Mitteln bewältigen. Bei 5M' dagegen zeigen sich erstmals Hinweise auf Zahlüberlegungen. A. weist darauf hin, daß auch im größeren Glas der Sirup bis zum zweiten von fünf Meßstrichen reichen müßte, wenn man einen gleich süßen Saft erhalten wollte.
Typisch für den Wechsel zwischen verschiedenen Aspekten ist ARNDTs Lösung der Einfüllaufgabe 4. Zunächst will er den Flüssigkeitsspiegel in gleicher Höhe zeichnen, denkt aber dann plötzlich um: "Es muß mehr Sirup sein, da sonst ja zuviel Wasser drin wäre." Er zeichnet den Sirupspiegel genau so, daß er am oberen Rand des kleinen Glases liegt. Es bleibt unklar, ob er so gleiche Wassermengen herstellen will oder nur keinen näherliegenden Anhaltspunkt findet. Auch dieser Weg allerdings wird im weiteren nicht durchgehalten. Bei den entsprechenden $\frac{1}{3}$-Aufgaben kommt A. wieder besser zurecht, bleibt jedoch bei sehr groben Überlegungen ("weniger Sirup als Wasser").

Für MARTIN (8;8) ist es fast selbstverständlich, die Sirup- und Wassermengen in seine Überlegungen einzubeziehen. Er mißt die Höhen der Flüssigkeitssäulen sehr sorgfältig mit den Fingern und löst so die $\frac{1}{2}$-Aufgaben

leicht, indem er jeweils Wasser- mit Sirupmenge vergleicht. Auch bei den $\frac{1}{3}$ -Aufgaben unternimmt MARTIN solche Versuche. Als Ergebnis stellt er fest: "Das kann man eigentlich gar nicht erkennen." und nach langem Zögern kreuzt er dann (in den Aufg. 4 und 5) die Mitte an. Der entscheidende Schritt, Anteile hier und dort zu vergleichen, gelingt ihm nicht. Vielmehr sucht er wieder bei der qualitativen Strategie (mehr Sirup und mehr Wasser) Zuflucht, diese allerdings zeigt gerade bei Aufgabe 5 ihre Unzulänglichkeit. Diese Schwierigkeiten entfallen dann auch vollständig bei den Meßglasaufgabben. "Beidesmal sind es drei Teile, hier drei große Teile, da drei kleine" begründet MARTIN seine Entscheidungen, entsprechend bei den $\frac{2}{5}$ -Aufgaben. In Aufg. 5M' zeigt er auf den zweiten Meßstrich: "Wenn es bis dahin gehen würde, dann wären sie gleich."

AXEL (9;3) offenbart in seinen Lösungsversuchen "Glanz und Elend" des kindlichen Denkens im konkret-operationalen Stadium. Er versucht auf alle möglichen Arten, die verschiedenen Größen in seine Begründungen einzubauen, gelangt dabei zwar oft zu richtigen Antworten, gleich darauf aber führt dieselbe Überlegung in eine Sackgasse. In der Aufgabe 4 ($\frac{1}{2}$) entscheidet er sich richtig für "gleich süß" mit der Begründung: "Das ist zwar mehr Sirup, aber dafür ist auch das Glas größer." Gleich bei dem nächsten Gläserpaar hat sich seine Überlegung - ohne daß er es merkt - verändert. Er übernimmt nur noch einen Teilgedanken: "Das hier ist süßer, weil das Glas ja größer ist." Bei den $\frac{1}{3}$ -Aufgaben versucht er es zunächst (Aufg. 4) mit einer einfachen Strategie: "Links ist weniger Wasser, also wird der Saft süßer." In der folgenden Aufgabe fällt ihm etwas auf, was ihn zu einer bei seinen Altersgenossen sehr seltenen Lösung führt: "Rechts ist doppelt so viel Sirup wie links, aber süßer wird es links." Leider ist es uns nicht gelungen, AXEL genauere

Erläuterungen zu entlocken, die Sache war für ihn klar. Doch darf man seine Antwort wohl als Versuch deuten, das eine Größenpaar einer Streckung zu unterwerfen und damit(längen-)verhältnistreu abzubilden.
In den Meßglasaufgaben werden diese quantifizierenden Ansätze nicht aufgegriffen und die Überlegungen wieder vergröbert. AXEL stellt fest: "Hier ist mehr Sirup und mehr Wasser, da ist weniger Sirup und weniger Wasser", also setzt er das Kreuz in die Mitte. (Aufg. 4M) Entsprechend bei Aufg. 5M: "Hier ist mehr Sirup und viel mehr Wasser als dort, das wird nicht so süß." Die Quantifizierung ist auf "mehr" und "viel mehr" reduziert. Damit nicht genug. Bei den nächsten Aufgaben (6M, 4M') tritt wieder der bekannte Wasservergleich auf, und als er bei 5M' endlich die Meßstriche zu Hilfe nimmt, tippt er genau auf den falschen.
In AXELs Antworten findet man somit fast alle Überlegungen und Begründungen, die sich angesichts von Verhältnissituaionen anbieten, mal richtig, mal falsch eingesetzt, noch nicht zu einem konsistenten Gebäude verbunden, oft nur als Ansatz, der dann nicht weiterverfolgt wird - ein eindrucksvolles Bild der Anstrengungen der Kinder dieser Altersstufe.

3.2.2.3 Interviews Realschule (Klasse 6)

Wie sich schon in der Untersuchung 1 andeutete, können wir entscheidende Fortschritte im Verhältnisdenken erst bei Kindern im Alter von elf bis zwölf Jahren erwarten. Die Auszüge aus den Gesprächen mit Schülern einer 6. Klasse (Realschule) werden zeigen, wie zunehmend stärker differenzierte und strukturierte kognitive Schemata aufgebaut werden.

Die beiden ersten Interviews sind charakteristisch für den Teil der Kinder, der noch stark mit den Strategien

zum Ziel zu kommen versucht, die wir bei den Grundschulkindern gefunden haben.

ANDREAS (11;3): Bei der Aufgabe 4 ($\frac{1}{2}$) will er zunächst auf das rechte Glas setzen, "weil das Glas größer ist und mehr Sirup da drin ist." Nicht nur der Vergleich der Sirupmengen scheint ihn zu dieser Entscheidung zu drängen, er bekräftigt sie noch durch den Hinweis auf die Höhe der Gläser. Dann aber fügt er hinzu: "Eigentlich müßte es ja gleich sein, weil beide bis zur Mitte gehen." Und diese Überlegung führt ihn dann hier ebenso wie auch bei der nächsten Aufgabe weiter. Bei der Aufgabe 4 ($\frac{1}{3}$) sagt er zunächst, ohne zu zögern: "Beide gleich." Dann aber: "Nein, rechts. Da ist ja mehr Sirup drin." Im Widerstreit zwischen den Entscheidungen, zu denen ihn der Vergleich der Sirupmengen einerseits, der Wassermengen andererseits führt, flüchtet er sich in den einfachsten Ausweg. Die nächste Aufgabe 5 ($\frac{1}{3}$) bringt ihn dazu, diese Strategie wieder aufzugeben: "Hier (rechts) ist ja viel mehr Wasser. Darum wird es da (links) süßer." Auch die Meßstriche helfen ihm nicht weiter. Bei Aufgabe 4M entscheidet er sich für das linke Glas, "weil da weniger Wasser ist." Die Aufgabe 4M' endlich löst er richtig, seine Begründung aber zeigt, daß er mit noch recht unzureichenden Mitteln zum Ziel gelangt ist: "In beiden ist weniger als die Hälfte Sirup, darum sind sie gleich süß."

In den beiden folgenden Interviews kommen die Kinder zwar einige Schritte weiter, ohne daß sie jedoch die Bedeutung von Vervielfachungs- bzw. Teilungsprozessen erkennen oder sich wenigstens von den Meßstrichen zu ihnen hinführen lassen.

SUSANNE (11;6) vergleicht in allen $\frac{1}{2}$-Aufgaben Sirup- und Wassermengen immer in den Kategorien mehr-weniger, viel mehr-viel weniger. Aufg. 4: "Rechts ist mehr Sirup

und mehr Wasser." Sie will zunächst ihr Kreuz in die Mitte setzen. Dann stockt sie und ergänzt ihre Überlegungen und fällt dabei allerdings in eine Begründung zurück, wie sie längst überwunden schien. "Aber rechts ist mehr Sirup, darum wird es dort süßer."
Aufg. 5: Hier kommt SUSANNE mit ihrem Denk- und Begründungsschema besser zurecht. "Rechts ist mehr Sirup, aber viel mehr Wasser." Sie kreuzt links an.
Aufg. 6 macht keine Schwierigkeiten. Vergleicht man die Antworten bei den $\frac{1}{3}$ -Aufgaben, so findet man bei Aufg. 4 einen wesentlichen Unterschied. Nun ist im größeren Glas in der Tat an Wasser mehr hinzugekommen als an Sirup. Dies bringt sie zwar nicht zur richtigen Gleichheitsentscheidung, sondern folgerichtig hält sie nun (im Gegensatz zur entsprechenden $\frac{1}{2}$ -Aufgabe) den Saft im linken Glas für süßer.
Sämtliche Antworten zu den Meßglasaufgaben sind dann aber richtig. Erstaunlich ist zwar, daß SUSANNE auch hier in ihren Erläuterungen "Mehr-viel mehr"- und nicht Anteilbegründungen gibt, bei den Entscheidungen jedoch läßt sie sich von den nun gekennzeichneten Teilen leiten. Sie scheint durch die Meßstriche zu einer richtigen Entscheidung gedrängt zu werden, ohne sich dessen bewußt zu werden. Die Abhängigkeit ihrer Urteile von den (fast zufällig) hervortretenden Merkmalen wird dadurch noch bestätigt.

MICHAEL (11;6) löst die $\frac{1}{2}$ -Aufgaben ganz unbeirrt, etwa Aufg. 4 so: "Da ist genau die Hälfte Sirup, dort auch." Die entsprechende Überlegung gelingt bei den $\frac{1}{3}$ -Aufgaben allerdings nicht mehr. Hier versucht er, über Differenzenvergleiche zum Ziel zu kommen: "Da (rechts) ist mehr Sirup, aber der Unterschied beim Wasser ist größer." So entscheidet er sich bei Aufgabe 4 (falsch) für das kleinere Glas, bei Aufgabe 5 führt die gleiche Überlegung zur richtigen Antwort. Die erfolgreiche Strategie

bei den $\frac{1}{2}$ -Aufgaben bringt offenbar keineswegs schon den Durchbruch zum Anteilvergleich. Diese Beobachtung ist besonders bedeutsam, weil sie zeigt, daß es sich bei den $\frac{1}{2}$ -Aufgaben um Sonderfälle des Verhältnisvergleichs handelt und eine Generalisierung durchaus noch nicht gelingt.
Noch deutlicher ist dies bei den Meßgläsern. Die $\frac{1}{3}$ -Aufgaben beantwortet MICHAEL genau in der beschriebenen Weise. Nur in 4M' entscheidet er sich für "gleich süß", seine Begründung allerdings zeigt, daß sich an seinen Denkschemata nichts geändert hat: "Beim Sirup ist fast der gleiche Unterschied wie beim Wasser, darum wird das gleich." (!) Dieser Weg führt aber eben nur bei $\frac{1}{2}$ -Aufgaben zur richtigen Äquivalenzentscheidung. Je geringer die Abweichung von der Hälfte wird, desto weniger bemerkt man den Unterschied. Endlich zeigt sich in den Einfüllaufgaben, daß MICHAEL auch bei solchen Gläsern den Sirup bis zur Hälfte einzeichnet, deren zugehöriges Vergleichsglas nur bis zu einem Drittel mit Sirup gefüllt ist. Fazit: Die Erkenntnis, daß es auf"die Hälfte" ankommen kann, ist insgesamt eher hinderlich als nützlich.

BIRGIT (11;9) machen die $\frac{1}{2}$ -Aufgaben keine Schwierigkeiten. Bei der Aufgabe 5 argumentiert sie: "Im großen Glas ist mehr Sirup, aber noch mehr Wasser, also wird es links süßer." Hier vergleicht sie offenbar Sirup- und Wassermengen in den beiden Gläsern getrennt, ein Verfahren, das aber nur in dem Sonderfall zum Ziel führt, daß ein Glas zur Hälfte gefüllt ist. Folgerichtig - aber weniger erfolgreich - geht sie bei den $\frac{1}{3}$ -Aufgaben (4 und 5) ähnlich vor. Aufgabe 4: "Da ist nur ein kleiner Unterschied beim Sirup, aber ein großer Unterschied beim Wasser, das kleinere Glas ist also süßer."
Aufgabe 5: "Obwohl ja mehr Sirup da ist, ist der Unterschied für das Wasser größer."

In beiden Fällen entscheidet sie sich für das kleinere Glas, einmal richtig, einmal falsch. Wie die statistische Analyse zeigen wird, ist BIRGITs Vorgehen typisch für diese Altersstufe. Wir treffen auf durchaus differenzierte Überlegungen, bei denen sämtliche Größen berücksichtigt werden, ohne daß der Schritt von Größen (und additiven Größenvergleichen) zu Verhältnisüberlegungen gelingt. Selbst die zusätzlichen Hilfen bei den Meßglasaufgaben werden nicht genutzt. Entscheidungen und Begründungen bleiben vollständig unverändert. Endlich fallen die Antworten bei den Einfüllaufgaben genau so aus, wie nach dem Geschilderten zu erwarten. Bei den $\frac{1}{2}$-Aufgaben erläutert sie ihre Entscheidungen damit, daß "genau die Hälfte Sirup sein muß", die breiteren Gläser zerlegt sie zudem mit dem Bleistift in kleinere. In den $\frac{1}{3}$-Aufgaben allerdings ist ein entsprechender Versuch zur Erfassung des Anteils nicht mehr erkennbar. Vielmehr begründet sie: "Es muß weniger als die Hälfte sein" - und kommt so zur richtigen Lösung.

MICHAEL K. (12;3) vergleicht stets die Sirupmenge mit dem Gesamtvolumen. Dabei kommt er zu folgender Überlegung, die sich bei allen Aufgaben 4 und 5 ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$) findet: "Da ist zwar mehr Sirup drin, aber das andere Glas ist (viel) niedriger."
Bei den Einfüllungsaufgaben zeichnet MICHAEL dann auch in den größeren Gläsern den Sirup "ein bißchen höher, weil das Glas größer ist." So wundert es nicht, daß er sich auch bei den Meßglasaufgaben mit einer Ausnahme für den Saft im kleineren Glas als den süßeren entscheidet. Diese Ausnahme bildet das Gläserpaar, in dem in beiden 2 von 5 Teile Sirup eingefüllt sind. MICHAELs Begründung, die er auf unsere Frage hin gibt: "Hier ist mehr Sirup und das Glas ist höher."
Diese Überlegungen zeigen zwar deutlich den Versuch,

Teil- und Gesamtvolumen in Beziehung zu bringen, doch geschieht dies nur qualitativ. Quantitative Überlegungen finden sich nicht einmal in Ansätzen. So ist es nicht verwunderlich, daß MICHAEL schnell an Grenzen stößt, die er mit den verfügbaren Mitteln nicht überschreiten kann. Diese qualitative Erfassung von Verhältnissituationen ist sicher eine notwendige Voraussetzung für ein tragfähiges Verhältnisdenken. Bis zur quantitativen Erfassung allerdings ist es noch ein weites Stück Weges, auf dem auch die Kinder dieser Altersstufe Hilfen benötigen.

RAINER S. (11;7) ist ein Beispiel eines Kindes, bei dem die Verhältnisbegriffsbildung bereits recht weit fortgeschritten ist. Zunächst trifft er seine Entscheidungen zu den $\frac{1}{2}$-Aufgaben sehr sicher: "Hier ist die Hälfte Sirup, da auch." (Aufg. 4) "Da ist weniger als die Hälfte." (Aufg. 5) Bis zu dieser Überlegung gelangen noch viele seiner Altersgenossen. Bei der Aufgabe 4 ($\frac{1}{3}$) aber zeigt RAINER ein Vorgehen, das sich nur bei wenigen Kindern findet. Zunächst zögert er und meint: "Da ist das gleiche wie eben bei der Hälfte." Auf unsere Nachfrage, ob denn auch nun beide Gläser zur Hälfte gefüllt sind, präzisiert er: "Jetzt ist in beiden Gläsern weniger, ungefähr der dritte Teil." Diesen Rest von Unsicherheit streift er dann bei den Meßglasaufgaben ab, und auch die Einfüllaufgaben löst er vollständig richtig. Dabei versucht er - so gut es durch Abmessen mit den Fingern geht - den im Musterglas vorgegebenen Sirupanteil auf das Vergleichsglas zu übertragen.

5.2.2.4 Stichworte zu den Ergebnissen der Interviews

(1) Nach den Interviews kann man folgende grobe Charakterisierung der typischen Überlegungen in den verschiedenen Altersgruppen geben: Die Vorschulkinder sind weitgehend auf eine ins Auge fallende Größe (meist die Sirupmenge) fixiert. Im Grundschulalter steht der Versuch im Vordergrund, mehrere Wahrnehmungsdimensionen zu verarbeiten, ohne daß die Integration gelingt. Bei den Kindern des 6. Jahrgangs endlich ist die Multidimensionalität des Problems ziemlich selbstverständlich, doch macht die Verarbeitung der zahlreichen Variablen hier weiterhin erhebliche Schwierigkeiten.

Besonders deutlich wird in den Interviews, wie die Kinder ihre bisherigen Kenntnisse auszunutzen und neue Überlegungen an diese anzulagern versuchen. Nur zögernd gehen sie kleine Schritte über sie hinaus. Dies ist sicher nicht erstaunlich, wenn man von der kaum bestreitbaren Annahme ausgeht, daß sich die Entfaltung kognitiver Strukturen nur in genetischen Entwicklungen vollzieht. Gleichwohl ist überraschend, wie stark sich die meisten Kinder an den Vergleich von Größen und Größendifferenzen klammern und so kaum zu Strategien gelangen, die es ihnen gestatten, Größenpaare nach ihrem Verhältnis zu vergleichen. Die Bindung an die ikonische Repräsentation ist auch bei den meisten der älteren Kinder noch sehr stark. Weiterführende Konzepte aber werden erst dann verfügbar, wenn die Loslösung von dieser Ebene gelingt.

Diese Beobachtungen geben den Ausgangspunkt und Hintergrund für jede Förderungsbemühung ab und sind daher insbesondere für unsere weiteren Untersuchungen nützlich.

(2) In den Interviews werden zwar Denkmuster sichtbar, die mit den in 2.1 skizzierten (möglichen) Stufen der Be-

griffsentwicklung korrespondieren. Dennoch ist die Zuordnung einzelner Kinder zu bestimmten "Niveaus" problematisch. Dafür gibt es mehrere Gründe:

- Die Antworten sind in vielen Fällen inkonsistent. Es kommt häufig vor, daß die Begründungen von Aufgabe zu Aufgabe schwanken.
- Die Erläuterungen der Kinder passen vielfach nicht zu der Entscheidung, zu der sie schließlich beim Ankreuzen kommen.
- Wir haben bewußt vermieden, die Kinder bei jeder Aufgabe zu einer ausführlichen Verbalisierung zu drängen. Die Gefahr ist sehr groß, daß in diesem Falle die Antworten mehr die Absichten des Versuchsleiters als das Denken der Kinder wiedergeben. Man kann leicht beobachten, wie die Kinder sich an Begründungsvorschläge anlehnen oder einmal gegebene Begründungen ständig wieder aufgreifen.
- Es ist schwer - und erscheint uns durchaus nicht erstrebenswert -, die Gesprächsführung so weit zu normieren, daß für die Antworten nur noch vorgegebene Kategorien vorgesehen sind.

Aus diesen Gründen werden die Interview-Ergebnisse nicht quantitativ ausgewertet. Stattdessen beschränken wir uns im folgenden in der statistischen Analyse auf die schriftlichen Antworten. Die Interviews haben ihren Zweck erfüllt, wenn sie unsere Kenntnisse von den Überlegungen und Schwierigkeiten der Kinder anreichern können.

3.2.3 Quantitative Auswertung der Ergebnisse

3.2.3.0 Vorbemerkungen

(1) Das Ziel dieser Stichworte zur statistischen Analyse ist es, einige der Interview-Ergebnisse zu stützen. Da wir die Untersuchung 2 keineswegs als "Großversuch" geplant haben, sind auch in diesem Abschnitt nur entsprechend bescheidene Ergebnisse zu erwarten. Die Analyse der Ergebnisse erfüllt lediglich eine Hilfsfunktion bei dem Versuch, das Denken der Kinder zu verstehen.

(2) Auch an dieser Stelle wird deutlich, daß die Aussicht, möglichst gesicherte Antworten auf einige Fragen zu erhalten, nur um den Preis einer Verengung des Blickfeldes erkauft werden kann. So deckt der geschilderte Test allenfalls einen kleinen Ausschnitt aus der Entwicklung des Bruchbegriffes auf. Wir beschränken uns darauf, die Erfassung der Äquivalenz von Größenpaaren in einer ausgewählten Sachsituation zu verfolgen. Andere Aspekte treten in den Hintergrund, etwa die Frage, wie Kinder Bruchteile herstellen, Herstellungsprozesse erkennen und vergleichen.

(3) In den Ergebnissen werden wir zahlreiche Übereinstimmungen mit denen der Untersuchung 1 finden. Sie sind ein Indiz dafür, daß die Schwierigkeiten und Fortschritte der Kinder nicht an eine Sachsituation gebunden sind, sondern in der Tat Probleme der Entwicklung des Verhältnisdenkens aufzeigen. Dies ist ein wichtiges Ergebnis, da es uns gestattet, die Aussagen von der Bindung an den in der vorangegangenen Untersuchung gewählten probabilistischen Kontext zu lösen.

(4) Begründete didaktische Konsequenzen ergeben sich auch aus den vorliegenden Beobachtungen nur in recht allgemeiner Form. Zum einen ist die Aufgabenstellung noch nicht an spezielle didaktische Ansätze gekoppelt, zum anderen ist unser Versuch nicht als Lernexperiment geplant. Er kann so lediglich die Komplexität des Begriffsbildungsprozesses aufzeigen, kaum aber die Frage beantworten, wie das Kind mit den auftretenden Schwierigkeiten fertig wird und in welcher Weise der Unterricht dabei helfen kann. Stärker in den Blick rückt dieser Aspekt erst im Kapitel 4.

3.2.3.1 Ergebnisse des Teils 1

(1) Die Tabelle 3.8 gibt einen Überblick über die Mittelwerte richtiger Entscheidungen im ersten Teil des Tests.

	Zahl der Kinder	Alter Mittelwerte (Jahre)	Mittelwerte der Anzahl richtiger Lösungen $\frac{1}{2}$ -Aufg.	$\frac{1}{3}$ -Aufg.	Gesamt
Vor-schule	28	5;0 - 6;6 / 5;10	4,04	4,00	8,04
Grund-schule	29	9;1 -10;10 / 9;8	5,52	5,35	10,87
Real-schule	31	11;4 -12;7 / 11;9	6,29	6,26	12,55

Tab. 3.8: Ergebnisse des ersten Teils des Tests für die drei Altersgruppen

Hier lassen sich die ersten - noch groben - Aussagen gewinnen. Die Mittelwerte zwischen je zwei Altersgruppen unterscheiden sich signifikant, bei dem Vergleich Vorschule/Grundschule auf dem 1 ‰-Niveau, bei dem Vergleich Grundschule/Realschule auf dem 1 % -Niveau.

Zur Analyse verwendet wurde der U-Test, ein parameterfreier Test zur Prüfung von Mittelwertunterschieden zwischen unabhängigen Stichproben. (Vgl. CLAUSS/EBNER, 1967, S. 205) Erstaunlicher ist, daß sich die $\frac{1}{2}$ -und $\frac{1}{3}$ -Ergebnisse in den drei Versuchsgruppen kaum unterscheiden. Dies ist deshalb überraschend, weil man durchaus erwarten könnte, daß $\frac{1}{2}$ -Aufgaben leichter sind. Die Verhältnisüberlegung läßt sich bei ihnen auf Größenvergleich reduzieren. Bei den $\frac{1}{3}$ -Aufgaben dagegen kommt man mit Größenvergleichen nicht nehr aus. Entscheidend ist hier die Erfassung von Meß- und Teilungsprozessen.

(2) Analyse der Ergebnisse der einzelnen Aufgaben

Genauere Information über Schwierigkeiten bei der Bruchbegriffsbildung erhält man aus der Analyse der einzelnen Aufgaben. In der Tab. 3.9 sind die Ergebnisse des Teils 1 zusammengestellt.

Gruppe \ Aufg.Nr.		1	2	3	4	5	6	7
VS	$\frac{1}{2}$	89,4	60,7	100	0	18,0	39,3	96,4
	$\frac{1}{3}$	85,7	60,7	96,4	0	25,0	42,9	89,3
GS	$\frac{1}{2}$	100	100	96,5	27,6	55,2	72,4	100
	$\frac{1}{3}$	100	100	92,1	6,9	65,5	75,9	93,1
RS	$\frac{1}{2}$	100	100	100	45,2	87,1	100	96,8
	$\frac{1}{3}$	100	100	100	32,2	93,6	100	100

Tab. 3.9: Relative Häufigkeiten richtiger Antworten (in Prozent) im Teil 1

Folgendes fällt auf:

- Die Aufgaben 1, 3 und 7 werden nahezu vollständig richtig beantwortet (jeweils 90 - 100 %). Allerdings bedeutet dies keinesfalls, daß bereits Vorschulkinder in einfachen Situationen eine Vorstellung von Verhältnissen entwickeln. Sieht man sich nämlich die Aufgaben genauer an, so stellt sich heraus, daß man bei allen drei Aufgaben zum richtigen Ergebnis kommt, wenn man seine Entscheidung nur an der "Sirupmenge" (der gefärbten Fläche) orientiert. Diese Aufgaben können daher nicht als Indikatoren kindlicher Entwicklung gelten.
- Interessant ist das Ergebnis der Aufgabe 2. Hier handelt es sich um zwei identische Gläser, die bis zur gleichen Höhe mit Sirup gefüllt sind. Es sind also keinerlei Schwierigkeiten zu vermuten, und in der Tat wird die Aufgabe von den älteren Kindern ausnahmslos richtig gelöst. Lediglich die Vorschulkinder haben überraschend einige Probleme. Nur 60 % von ihnen erkennen die beiden Mischungen als gleich süß. Begründungen sind auch in den Interviews nicht zu erhalten. Eine mögliche Erklärung ist die, daß sehr junge Kinder Mühe haben, verschiedene Gläser (Größenpaare) - auch wenn sie in allen Größen übereinstimmen - als gleichwertig zu erfassen. Je etwa 20 % entscheiden sich ohne erkennbare Begründung für das eine oder andere Glas. Ein genau gleiches Ergebnis erhält man für die entsprechende $\frac{1}{3}$ -Aufgabe.
- Wie zu erwarten, zeigen sich deutliche Unterschiede

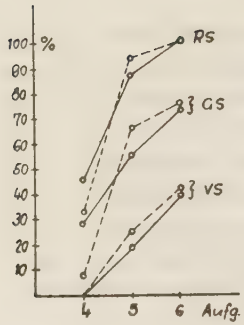


Abb.3.1o: Ergebnisse der Aufgaben 4,5 und 6

(zwischen den Altersgruppen wie zwischen den Aufgaben) erst in den Items, bei denen die Entscheidung sich nicht allein auf die Sirupmenge stützen kann, sondern gleichsam "gegen" sie erfolgt. Die Abbildung 3.10 enthält die Ergebnisse dieser Aufgaben (4, 5, 6). Die Ergebnisse der $\frac{1}{3}$ -Aufgaben sind gestrichelt eingezeichnet.

(3) Zur statistischen Absicherung

Bei jeder der drei Aufgaben nimmt die Zahl der richtigen Lösungen mit dem Alter zu. Mit Hilfe des χ^2 -Tests wurde die Signifikanz dieser Unterschiede untersucht. Bis auf zwei Ausnahmen sind sie sämtlich signifikant. (Vgl. Tabelle 3.10.)

		Aufg.4	Aufg.5	Aufg.6
VS - GS	$\frac{1}{2}$	$\alpha < 0{,}01$	$\alpha < 0{,}01$	$\alpha < 0{,}01$
	$\frac{1}{3}$	n.s.	$\alpha < 0{,}01$	$\alpha < 0{,}02$
GS - RS	$\frac{1}{2}$	n.s.	$\alpha < 0{,}001$	$\alpha < 0{,}001$
	$\frac{1}{3}$	$\alpha < 0{,}02$	$\alpha < 0{,}01$	$\alpha < 0{,}01$

Tab. 3.10: Prüfung der Unterschiede zwischen den Altersgruppen: Signifikanzniveaus (χ^2 -Test)

3.2.3.2 Interpretation der Ergebnisse (Teil 1)

(1) Hinweise auf Stufen in der Entwicklung des Denkens

Um genauere Information über die Begriffsgenese zu erhalten, sind die Aufgaben - wiederum gelenkt von der Grundvorstellung einer stufenförmigen Entwicklung - so gewählt, daß der Rückhalt, den die Wahrnehmung bietet, von Aufgabe 6 über 5 zu Aufgabe 4 geringer wird.

Bei Aufgabe 6 ist die Überlegung, die zur richtigen Lösung führt, noch sehr einfach. ("Gleich viel Sirup, aber rechts das größere Glas bzw. erheblich mehr Wasser".) Das Problem der Vierstelligkeit der Relation Verhältnisgleichheit wird dadurch zurückgedrängt, daß zwei Größen gleich sind. Durch geschickten Vergleich der beiden anderen kommt man zum Ziel. Sämtliche Realschüler haben denn auch keinerlei Schwierigkeiten. Von den Grundschulkindern bleibt schon rund ein Viertel bei dem ersten Teil dieser Überlegungen stehen und kommt so zur falschen (Gleich-) Entscheidung. Bei den VS-Kindern sind alle drei möglichen Antworten etwa gleich häufig vertreten. Zunächst könnte man vermuten, daß dieses Ergebnis weitgehend auf Zufall beruht. Die Interviews dagegen machen deutlich, daß auch die meisten der jüngsten Kinder durchaus konsequent überlegen und ihre Entscheidung treffen. Dabei schwanken sie zwischen drei Begründungen, die jeweils zu einer anderen Antwort führen:

- In den beiden Gläsern ist gleich viel Sirup, also wird auch der Saft gleich süß.
- Das rechte Glas ist größer, daher ist der Saft süßer.
- Endlich findet man auch die richtige Überlegung, daß der Saft weniger süß wird, wenn mehr Wasser hinzukommt.

Versuchen wir eine entsprechende Analyse bei der Aufgabe 5. Die Gleichheitsentscheidung wird hier durch nichts mehr provoziert - die Gläser unterscheiden sich in allen relevanten Größen - und tritt auch kaum auf. Bei den VS-Kindern finden wir wieder die Fixierung auf die gefärbte Fläche (den Sirup), bei den GS-Kindern kommt die Begründung über die Wassermenge ("rechts ist mehr Wasser, also wird der Saft dort weniger süß") schon stärker ins Spiel. Erst bei den elf- bis zwölfjährigen Kindern werden die beiden gegenläufigen Überlegungen ("mehr Wasser und mehr Sirup") präzisiert und z.T. quantifiziert. Nur bei wenigen Kindern allerdings deuten die Antworten auf einen Anteilvergleich hin. Die typischen Begründungen von Entscheidungen für das linke Glas lauten: "Links ist genau so viel Wasser wie Sirup, rechts weniger Sirup als Wasser". Oder: "Rechts ist zwar mehr Wasser, aber viel mehr Sirup als links". Es scheint, als versuche das Kind von dem ziemlich geringen Unterschied der Sirupmengen zu "abstrahieren", um so diese Aufgabe in gleicher Weise wie die zuvor diskutierte behandeln zu können. Dieses Vorgehen drängt sich vor allem bei der $\frac{1}{3}$-Aufgabe auf, da dort der "Wasserüberschuß" noch deutlicher wird. In der Tat steigt die Zahl der richtigen Lösungen hier leicht an. Dies weist auf einen noch weitgehend additiven Vergleich hin, bei dem die Ordnungsrelation im Größenbereich Flächeninhalt herangezogen wird. Dieses Vorgehen führt bei Aufgabe 5 noch zum Ziel.

Daß es dennoch gefährlich ist und im allgemeinen falsche Entscheidungen zur Folge hat, zeigt sich in der Aufgabe 4. Hier endlich ist die Möglichkeit, die Entscheidung nur auf den Vergleich zweier Größen zu stützen, vollends verschwunden. Weder der Vergleich der Sirupmengen noch der Wassermengen allein führt zur richtigen Lösung. Die jüngsten Kinder liefern keine

richtige Antwort mehr, und auch bei den älteren sinkt die Lösungshäufigkeit stark ab. Die letzte Möglichkeit, nun noch mit Größenvergleichen weiterzukommen, besteht bei der $\frac{1}{2}$ -Aufgabe in der Überlegung "gleich viel Wasser und Sirup hier wie dort". Diese Lösungsstrategie geht erst bei der entsprechenden $\frac{1}{3}$ -Aufgabe verloren. Die Zahl der richtigen Lösungen nimmt - folgerichtig - noch weiter ab. Auch die Grundschüler haben nun kaum mehr eine Chance, nur bei den Realschülern finden wir noch etwa 30 % richtige Antworten. Allerdings wird auch bei ihnen eine Begründung, die Anteilvergleiche erkennen läßt, selten gegeben. (Vgl. die Interviews.)

(2) Zur Überprüfung der Signifikanz der Unterschiede zwischen den Aufgaben innerhalb der Gruppen wird der Test von McNEMAR für abhängige Stichproben verwendet. In die Prüfgröße $\frac{b-c}{\sqrt{b+c}}$ gehen dabei nur die Anzahlen der Kinder ein, die jeweils genau eine der zu vergleichenden Aufgaben gelöst haben. (Näheres findet man bei CLAUSS/EBNER, 1967, S. 242 ff.) Die Prüfgröße folgt einer Normalverteilung. Die Irrtumswahrscheinlichkeiten, mit denen sich die jeweiligen Nullhypothesen ("beide Aufgaben sind gleich schwer") zurückweisen lassen, sind in der Tabelle 3.11 zusammengestellt.

	Vergleich der Aufgaben			
	4 - 5		5 - 6	
	GS	RS	GS	RS
$\frac{1}{2}$ -Aufgaben	$\alpha < 0{,}05$	$\alpha < 0{,}001$	$\alpha \approx 0{,}10$	$\alpha < 0{,}05$
$\frac{1}{3}$ -Aufgaben	$\alpha < 0{,}001$	$\alpha < 0{,}001$	n.s.	n.s.

Tab. 3.11: Unterschiede zwischen den Aufgaben: Signifikanzniveaus

Während bei den $\frac{1}{2}$ -Aufgaben noch signifikante Unterschiede bei allen Vergleichen auftreten, verschwinden bei den $\frac{1}{3}$ -Aufgaben die Unterschiede zwischen Aufgabe 5 und 6 nahezu vollständig, die zwischen Aufgabe 4 und den beiden anderen werden hochsignifikant. Aufgabe 4 stellt sich als kritische heraus. Das ist nicht allzu überraschend, offenbar ist die Erfassung der Äquivalenz von Größenpaaren das zentrale Problem der Bruch- bzw. Verhältnisbegriffsbildung. Dabei kommt man nicht mehr mit Größenvergleichen mehr oder weniger gut zurecht. Vielmehr muß ein neuer Begriff gebildet werden, der eine Loslösung von den Größen (und damit von der Wahrnehmung) erfordert. Es geht hier um "Verhältnisse zwischen wahrnehmbaren Zügen der Wirklichkeit, Verhältnisse, die durch Hinzeigen nicht direkt bezeichnet werden können." (BRUNER/KENNEY, 1971, S. 207)

(3) Genauere Analyse der Fehlentscheidungen bei der Äquivalenzerfassung

Alle bisherigen Ergebnisse weisen eine deutliche Entwicklung der Art auf, daß sich das Kind mit zunehmendem Alter immer besser von der Wahrnehmung löst, speziell von Entscheidungen, die sich nur an den gefärbten Flächen orientieren. Dieses Abrücken von der Sirupmenge ist jedoch erst ein Schritt in Richtung auf den Verhältnisbegriff. Dies wird deutlich, wenn wir die Ergebnisse der Aufgabe 4 bei den ältesten Kindern genauer analysieren. In der Abb. 3.11 sind die Gläserpaare und die Ergebnisse noch einmal dargestellt.

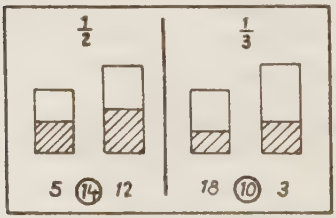


Abb.3.11: Entscheidungen der Realschüler bei Aufgabe 4

Die statistische Analyse deckt keinen signifikanten Unterschied zwischen der $\frac{1}{2}$ -und der $\frac{1}{3}$ -Aufgabe in der Anzahl richtiger Lösungen auf. Schwerer zu interpretieren

ist die Art der Fehlentscheidungen: Bei der $\frac{1}{3}$ -Aufgabe finden wir unter diesen erheblich mehr Entscheidungen für das Glas mit weniger Sirup (signifikant auf dem 5 % -Niveau).

Auf der Suche nach einer Erklärung für dieses Phänomen können uns die Interviews weiterhelfen. Bei der $\frac{1}{2}$ -Aufgabe bleiben die Kinder entweder beim Sirupvergleich stehen, oder aber sie kommen zur richtigen Antwort mit der typischen noch unscharfen Begründung, daß "rechts mehr Sirup und mehr Wasser ist, also der Saft genau so süß wie links wird." Für die $\frac{1}{3}$ -Aufgabe ist eine andere Begründung charakteristisch: "Rechts ist mehr Sirup, aber viel mehr Wasser, der Saft muß also links süßer werden." Die Kinder messen aus, was im rechten Glas an Sirup, dann was an Wasser hinzukommt, stellen fest, daß dieser Zuwachs beim Wasser größer ist - und entscheiden sich konsequent für das linke Glas. Hier wird der bereits erwähnte Vergleich mit Hilfe von Größendifferenzen - und auch seine Unzulänglichkeit - sichtbar. Die Kinder nehmen durchaus eine vierstellige Relation zu Hilfe, allerdings stützen sie ihr Urteil auf Vergleiche der Unterschiede. Dies führt dazu, daß sie sich zwar von der Fixierung auf die Sirupmenge lösen, ohne daß sie jedoch zur Erfassung der Äquivalenz gelangen. Sie schwenken gleichsam an der Äquivalenz vorbei und werden von der Wassermenge gefangengenommen. Ein "Gleichgewicht" zwischen den verschiedenen Überlegungen stellt sich nicht ein.

3.2.3.3 Ausgewählte weitere Fragen (Teil 2/3)

(1) Wie stellen Kinder äquivalente Größenpaare her?

Das Problem der Äquivalenzerfassung wird im Teil 2 des Tests noch einmal mit etwas veränderter Fragestellung aufgegriffen. Die Aufgabe der Kinder besteht nun darin,

in ein leeres Glas so viel "Sirup" einzuzeichnen, daß der Saft dort ebenso süß wird wie in einem vorgegebenen Musterglas. Dabei werden die Vergleichsgläser systematisch variiert: Glas 1 stimmt mit dem Musterglas in Durchmesser und Höhe überein, Glas 2 nur in der Höhe, Glas 3 nur im Durchmesser, Glas 4 endlich in keinem von beiden. Die Ergebnisse findet man in Tab. 3.12.

Aufg. / Gruppe		1	2	3	4	Gesamt
VS	$\frac{1}{2}$	96,4	75,0	17,9	17,9	51,8
	$\frac{1}{3}$	89,3	75,0	10,7	7,1	45,5
GS	$\frac{1}{2}$	100	44,8	55,2	41,4	60,4
	$\frac{1}{3}$	100	41,4	31,0	6,9	44,8
RS	$\frac{1}{2}$	100	35,5	74,2	41,9	62,9
	$\frac{1}{3}$	100	35,5	61,3	54,8	62,9

Tab. 3.12: Ergebnisse der Einfüllaufgaben (Teil 2): Relative Häufigkeiten richtiger Antworten in Prozent

Zur Verdeutlichung sind in der Abb. 3.12 die Ergebnisse der $\frac{1}{2}$ -Aufgaben noch einmal graphisch dargestellt.

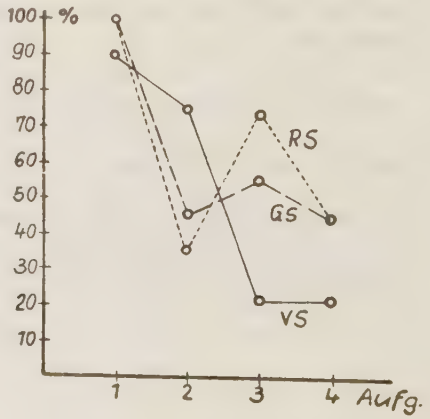


Abb.3.12: Zu den Ergebnissen im Teil 2 ($\frac{1}{2}$ - Aufgaben)

Einige Anmerkungen:

- Aufgabe 1 (identische Gläser) wird auch hier im wesentlichen richtig gelöst. Bei Aufgabe 3 erhalten wir annähernd die gleichen Ergebnisse wie im ersten Teil des Tests. (Die Zahl der erfolgreichen Lösungen liegt jeweils ein wenig höher.)
- Ändert man nur den Durchmesser des Glases, so erzielen die Vorschulkinder die meisten richtigen Lösungen, die Realschüler die wenigsten. (Der Unterschied ist signifikant auf dem 1 % -Niveau.) Woran liegt dies? Unbeirrt von weiteren Überlegungen, zeichnen die jüngsten Kinder die gleiche Flüssigkeitshöhe wie im Musterglas ein, während die älteren sich die Antwort sehr viel schwerer machen. Vor allem bei den Realschülern trifft man eine typische Überlegung häufig an: "Da das Glas breiter ist, darf der Sirup nicht so hoch sein, weil sonst ja zuviel davon da ist." Hier kommt offenbar die Mengenkonstanz als Störkonzept ins Spiel. Entfällt diese Störung, so nehmen die richtigen Lösungen bei den älteren Kindern sprunghaft zu (Aufg. 3), auch wenn die Höhe des Glases sich ändert. Dagegen fallen nun die Vorschulkinder rapide ab, ihre "Strategie der gleichen Siruphöhen" führt jetzt natürlich zu falschen Ergebnissen. Ganz ähnliche Beobachtungen kann man bei Aufg. 4 machen, die älteren Kinder zeigen auch hier wieder den "Mengenkonstanz-Abfall".
- Insgesamt ist festzustellen, daß ein Bruchbegriff, der Belastungen durch Störungen gewachsen ist, selbst bei den älteren Kindern nur z.T. vorhanden ist. Die Tatsache ist überraschend, daß nur etwa 40 % der Zwölfjährigen die Aufgaben 2 und 4 meistern. Nebenbei wird deutlich, wie gefährlich allzu globale Aussagen sind. Geht man in unserem Beispiel von den

prozentualen Häufigkeiten richtiger Antworten für die vier $\frac{1}{2}$ -Aufgaben zusammen aus (VS: 51,8, GS: 60,4, RS: 62,9), so sind Unterschiede weitgehend verwischt.

- Zieht man zum Vergleich auch hier die $\frac{1}{3}$ -Aufgaben heran, findet man bei den Aufgaben 1 und 2 kaum Unterschiede. In den Aufgaben 3 und 4 aber liegen die Ergebnisse der Grundschulkinder bei den $\frac{1}{3}$ -Aufgaben erheblich unter denen der $\frac{1}{2}$ -Aufgaben, während sich im 6. Schuljahr kein Rückgang zeigt. Hier begegnet uns wieder ein schon mehrfach erwähnter Effekt. Das Denken der älteren Kinder hat sich offenbar - bei aller noch vorhandenen Unzulänglichkeit - bereits so weit stabilisiert, daß es bei der Lösung von Verhältnisproblemen nicht mehr auf das Vorhandensein spezieller Stützen, wie sie in den $\frac{1}{2}$ -Aufgaben enthalten sind, angewiesen ist.
- Auf die statistische Analyse wollen wir nur kurz eingehen. Bei den Realschülern sind alle Unterschiede zwischen je zwei $\frac{1}{2}$ -Aufgaben (außer 2 und 4) mindestens auf dem 1 % -Niveau signifikant. Insbesondere also führt die Veränderung des Durchmessers zu erheblich mehr Schwierigkeiten als die Veränderung der Höhe. Möglicherweise hat dies seine Ursache darin, daß bei zylindrischen Gläsern das Volumen dem Quadrat des Durchmessers proportional ist und so - durchaus folgerichtig, solange die Fixierung auf Größen noch nicht überwunden ist - die Verdoppelung des Durchmessers in besonderem Maße zu Fehlentscheidungen führt. Bei den Grundschulkindern gehen die Unterschiede zwischen den Aufgaben weitgehend verloren.

(2) Kann man Verhältnisdenken provozieren?

Dieser Frage gilt der dritte Teil unseres Tests. Bei den bisherigen Aufgaben haben wir den Kindern nur die

Gläserpaare vorgelegt, ohne weitere Hilfen zu geben. Dies könnte insbesondere zu der Schwierigkeit führen, daß das Kind zwar Anteilüberlegungen ("eins von drei Teilen Sirup","zu einem Drittel gefüllt") anzustellen versucht, dann aber unsicher wird, ob nicht vielleicht doch etwas mehr oder weniger als der dritte Teil des Glases gefüllt ist. Wir haben daher in den Klassen 3 und 6 einige der $\frac{1}{3}$ -Aufgaben (4,5 und 6) noch einmal gestellt und dabei "Meßgläser" verwendet. Die Kinder wurden darauf hingewiesen, daß wir - um genauer messen zu können - Gläser gewählt haben, an denen sich in gleichen Abständen Meßstriche (MS) befinden. Neu hinzu kommen die entsprechenden $\frac{2}{5}$ -Aufgaben.
Die Ergebnisse sind in Tab. 3.13 zusammengestellt.

		$\frac{1}{3}$ -Aufgaben			$\frac{2}{5}$ -Aufgaben		
		4M	5M	6M	4M'	5M'	6M'
GS	mit MS	27,6	72,4	82,6	31,0	86,2	86,2
	ohne MS	6,9	65,5	75,9	-	-	-
RS	mit MS	32,3	87,1	100	41,9	80,6	100
	ohne MS	32,3	93,5	100	-	-	-

Tab. 3.13: Ergebnisse der Meßglasaufgaben (Teil 3) (in Prozent)

Vergleicht man die Ergebnisse mit denen der entsprechenden Aufgaben im Teil 1, so ist nur in der Aufgabe 4 M -der nach den bisherigen Erfahrungen kritischen - eine beachtenswerte Steigerung der Grundschulkinder erkennbar. Eine Begründung ist weitgehend auf Vermu-

tungen angewiesen. Am ehesten erscheint diese Überlegung plausibel: Die jüngeren Kinder urteilen - wie wir gesehen haben - vorwiegend nach einer Wahrnehmungskategorie, mal nach der Sirup-, mal nach der Wassermenge. Bei den Meßgläsern nun kommt eine weitere Entscheidungshilfe ("in beiden Gläsern bis zum ersten Strich") hinzu und führt zu mehr Gleichheitsentscheidungen. Demgegenüber wird das Urteil der älteren Kinder, das weitgehend auf additivem Größenvergleich beruht, von der angebotenen Hilfe kaum beeinflußt. An der Überlegung, daß viel mehr Wasser hinzukommt als Sirup, ändert sich ja nichts. Jedenfalls kann das Scheitern hier nicht mehr an Meß- oder Schätzschwierigkeiten liegen.

Auffallend gering endlich sind die Unterschiede zwischen $\frac{1}{3}$ -und $\frac{2}{5}$ -Aufgaben. Nimmt man die drei Aufgaben zusammen, so erzielen die Realschüler ein fast genau gleiches Ergebnis, bei den Grundschülern findet man eine geringe, jedoch nicht signifikante Differenz zugunsten der $\frac{2}{5}$ -Aufgaben.

4. UNTERSUCHUNGEN ZUR FÖRDERUNG DES VERHÄLTNISDENKENS DURCH UNTERRICHT

4.1 Probleme fachdidaktischer Unterrichtsforschung

4.1.1 Begriffsentwicklung und Unterricht

(1) In diesem Kapitel werden zwei Versuche beschrieben, dem möglichen Einfluß unterrichtlicher Bemühungen auf Begriffsbildungsprozesse nachzugehen. Viele der Probleme, auf die wir bisher gestoßen sind, werden uns auch hier nicht los lassen (so etwa die Vielschichtigkeit des Verhältnisbegriffs, die Dualität von syntaktischer Gewinnung von Regeln und semantischer Verankerung, die Verzahnung von mathematischer Analyse und Fragen der Psychogenese und viele andere).
Einige Stichworte zum Begriffslernen sind bereits im Kap. 2 zusammengestellt. Hier nun geht es - mit Blick auf die zu schildernden Unterrichtsversuche - um die speziellere Frage nach dem Verhältnis von Lernen (insbesondere durch schulische Instruktion) und Entwicklung beim Erwerb von Begriffen. PIAGET (1973, S. 53) stellt dazu fest:

> "Kinder erwerben den Zahlbegriff und andere mathematische Begriffe nicht erst im Unterricht. Im Gegenteil entwickelt das Kind diese Begriffe in einem beachtlichen Maße ganz von sich aus, unabhängig und spontan. Versuchen andererseits Erwachsene, einem Kind mathematische Begriffe vorzeitig aufzudrängen, dann lernt das Kind sie nur als Sprachschablonen, ein richtiges Verständnis dieser Begriffe stellt sich aber erst im Laufe seiner weiteren geistigen Entwicklung ein."

Damit ist unsere Frage allerdings nicht beantwortet, sondern nur umformuliert: Bleibt zwischen "spontanem Lernen" und "vorzeitigem Aufdrängen" Platz für sinnvolle didaktische Hilfen, durch die die Entwicklung zumindest unterstützt wird?

Die Vielschichtigkeit des Problems zeigt FISCHBEIN (1969, S. 291) in seiner Arbeit über "Mathematikunterricht und intellektuelle Entwicklung" (speziell vor dem Hintergrund der PIAGETschen Stadientheorie) auf:

> "Auf den ersten Blick erscheint die Antwort einfach: Der Unterricht erleichtert und beschleunigt die Entwicklung. Doch eine genauere Analyse zeigt, daß die Sachlage komplizierter ist. Tatsächlich beschränkt sich Unterweisung nicht auf schlichte Vermittlung von Informationen und die Ausbildung geistiger Mechanismen auf einem neutralen Boden. Lernen verlangt einen aktiven Rekonstruktionsprozeß mit angemessenen geistigen Mitteln unter Berücksichtigung der vorhandenen Möglichkeiten. Dies bedeutet, daß zunächst ein System von Fähigkeiten existieren muß, das die Rekonstruktion und Assimilation des Wissens erlaubt. Wir sind - wenigstens dem Anschein nach - in einem Teufelskreis: Die Entwicklung hängt vom Unterricht ab, die Effekte des Unterrichts hängen ihrerseits wiederum ab vom Entwicklungsstand der intellektuellen Mittel."

Die Antworten auf die damit aufgeworfenen Fragen werden verschieden aussehen, je nachdem, ob man die Betonung auf die Gesetze der Entwicklung fundamentaler kognitiver Strukturen legt (die damit unterrichtlichen Bemühungen - eventuell sehr enge - Grenzen setzen) oder auf Lernvorgänge (mit deren Hilfe intellektuelle Entwicklung beeinflußt werden kann).

Vereinfacht lassen sich die beiden Positionen mit dem Namen PIAGET und BRUNER assoziieren. Einerseits betont PIAGET (1968, S. 291):

> "Der Erfolg des Unterrichts ist dem Niveau der intellektuellen Entwicklung klar untergeordnet."

Auf der anderen Seite steht die Hypothese BRUNERs, daß in jedem Entwicklungsstadium erfolgreiche Anstrengungen möglich sind - und das für jedes Kind und zu jedem Unterrichtsgegenstand. (Vgl. BRUNER, 1970.)

Diese beiden Statements skizzieren allerdings durchaus keine unvereinbaren Standpunkte. Zunächst einmal steht hinter beiden die Überzeugung, daß kognitive Strukturen sich genetisch entwickeln und daß diese Entwicklung einen hochdifferenzierten Prozeß darstellt, der früh beginnt und Schritt für Schritt vorwärtsschreitet oder vorangetrieben wird. In seinem Verlauf wird das Kind fähig, zunehmend komplexere Phänomene handelnd und denkend zu bewältigen. Für didaktische Bemühungen bleibt in jedem Fall ein erheblicher Spielraum, unabhängig davon, wie man die zu durchlaufenden Entwicklungsstufen, Stadien, Spiralwindungen charakterisiert.

Wichtig ist für uns die Folgerung, die FISCHBEIN angibt, daß nämlich ein Weg,

> "um den Übergang zu den Charakteristika eines höheren intellektuellen Stadiums zu erleichtern, in der Präfiguration dieser Charakteristika mit den Mitteln des vorhergehenden Stadiums besteht." (1969, S. 298, Hervorhebung im Original)

Diese Forderung kann durchaus als Synthese der beiden skizzierten Ansätze brauchbar sein und ist sicher von erheblicher didaktischer Bedeutung. Sie weist dem Unterricht die Aufgabe zu, die jeweils verfügbaren kognitiven Mittel gezielt einzusetzen, um den Übergang zum nächsthöheren Niveau zu erleichtern. So können Verhältnis-, speziell etwa Wahrscheinlichkeitsfragen, in Größen- und Zahlfragen übersetzt werden, um so Anschluß an die bereits vorhandenen Kenntnisse zu gewinnen und diese für die Präfiguration komplexerer Leistungen nutzbar zu machen. Die Fähigkeit zum Umgang mit Größen wie Flächeninhalt und Volumen ist ja gerade charakteristisch für das Stadium der konkreten Operationen, während - zumindest nach PIAGET/INHELDER (1951) - der Wahrscheinlichkeitsbegriff erst nach geglücktem Übergang auf das folgende Niveau der formalen Operationen erworben werden kann.

(2) Die einfache eingangs zitierte Grundvorstellung, daß durch (schulische) Unterweisung intellektuelle Entwicklung erleichtert und beschleunigt werden kann, deckt sich mit dem in zahlreichen neueren Arbeiten zur Begriffsbildung bezogenen Ausgangspunkt. So vertreten KLAUSMEIER u.a. (1974, S. 3) einen "organism-centered, interactional viewpoint toward learning and development" und betonen, daß damit die Analyse von Lernbedingungen und -prozessen wichtiger wird als die Beschreibung und Erklärung durch biologisch-genetische Faktoren. Natürlich wird dadurch keine Bewertung vorgenommen, sondern nur ein pragmatischer und für weitere Untersuchungen brauchbarer Ausgangspunkt geschaffen.

Einen wichtigen Beitrag zur Synthese von Entwicklungs- und Lernprozessen liefert die Arbeit von INHELDER/SINCLAIR/BOVET (1974), die zahlreiche Versuche beschreiben, die den Einfluß der Unterweisung (apprentissage) auf das kognitive Verhalten aufdecken sollen. Hier liegt der Schwerpunkt nicht mehr allein auf den "Strukturen des Wissens", sondern auf "Unterweisung und Struktur". Dies führt zu einer "epigenetischen Sichtweise", zu einem "System, das den Fortschritt insgesamt durch Interaktion zwischen Umwelteinflüssen und genetischen Faktoren kennzeichnet". (S. 322)
Die Autoren zeigen in einer Vielzahl von Versuchen, daß bei entsprechender Unterweisung sogar Übergänge von einem Stadium zum nächsten dadurch möglich werden, daß sich Interaktionen zwischen verschiedenen kognitiven Schemata und Untersystemen entwickeln, die zunächst nur unabhängig voneinander existieren.

(3) Fassen wir das Bisherige zusammen, so kommen wir zu folgendem Ergebnis:
Eine zentrale Aufgabe des Mathematikunterrichts besteht darin, einen Beitrag zu der Entwicklung mathematischer Begriffe zu leisten. Sicher ist es nicht so, daß die

einschlägigen Begriffe sich zunächst irgendwie entwickeln, bevor der Unterricht einsetzt und auf ihnen Kalküle, Strukturen usf. aufbaut. Erst recht ist ein Unterricht nicht akzeptabel, der in erster Linie Regeln für den Umgang mit Zeichen vermitteln will, losgelöst von einem semantischen Unterbau. Dies würde dazu führen, daß Mathematikunterricht und Psychogenese unzulässigerweise voneinander getrennt werden: Hier wird das Kind zu gewissen Lernzielen geführt, etwa zu einem aufwendigen formalen Apparat "Bruchrechnung", dort spielt sich davon unabhängig die Entfaltung und Ausdifferenzierung des kindlichen Denkens ab.

Natürlich ist Unterricht nur eine Komponente in der Auseinandersetzung des Kindes mit seiner Umwelt. Er greift helfend, steuernd, vielleicht beschleunigend in die Entwicklung ein. Er knüpft an Erfahrungen des Kindes an, führt sie weiter zu Begriffen, hilft andererseits, diese Begriffe einzusetzen, um die Erfahrungen zu erweitern, zu präzisieren und in andere zu integrieren.

Jeder Versuch, Einflüsse von Unterricht auf die kognitive Entwicklung nachzuweisen, muß daher wohl von bescheidenen Erwartungen ausgehen. Zunächst einmal kann Unterricht der Entwicklung allenfalls einen "kleinen Schub" geben. Zudem ist Begriffsentwicklung kein eindimensionaler Vorgang und läßt sich auch nicht auf eine Dimension projizieren, sondern besteht in einem Geflecht von Leistungen mit zahlreichen Abhängigkeiten und Wechselwirkungen, aus dem in jedem Versuch nur ein kleiner Ausschnitt herausgegriffen werden kann. Darüberhinaus haben die Kinder unterschiedliche Ausgangspunkte, Schwierigkeiten, Lernfähigkeit. Endlich können Unterrichtsversuche nicht in Laborsituationen vor sich gehen, sondern müssen sich in konkreten Unterricht hineinwagen und sind dadurch zusätzlich eingeengt.

4.1. Möglichkeiten und Grenzen empirischer Unterrichtsforschung

(1) In der mathematikdidaktischen Literatur der BRD sind Versuche zur empirischen Erfassung von Unterrichtseffekten bisher recht selten und stoßen zudem oft noch auf Skepsis. Dies ist einigermaßen verwunderlich, wenn man Lernen als Veränderung versteht, die sich irgendwie äußern und nachweisen lassen muß. Zweierlei soll dabei betont werden. Zum einen geht es nicht darum, alles und jedes statistisch in den Griff zu bekommen - sicher gibt es wichtige Lernvorgänge, die sich so langsam und insgeheim abspielen, daß sie nicht kurzfristig zu nachweisbaren Veränderungen führen. Zum anderen soll Empirie keinesfalls als Ersatz für einfallsreichen Unterricht und Reflexion über ihn dienen. Wohl aber können die Ergebnisse von Untersuchungen einen Beitrag zur Klärung von offenen Fragen leisten und so für Meinungsbildung und -austausch hilfreich sein, insbesondere vor Dogmatismus schützen.

Es ist ein außerordentlich hinderliches Mißverständnis zu meinen, theoretische Überlegungen und empirische Untersuchungen seien zwei Dinge, die bestenfalls nebeneinander herlaufen oder gar im Streit miteinander liegen. Vielmehr sind es zwei Wege zur Gewinnung von Erkenntnis, die sich ergänzen und gegenseitig weiterhelfen. Philosophie der Erziehung, Kataloge allgemeiner Lernziele, Sammlungen didaktischer Prinzipien, mathematische Analysen sind gewiß notwendige Bausteine einer umfassenden didaktischen Konzeption. Ebenso unentbehrlich aber ist der Versuch, die Tragweite der theoretischen Ansätze zu erfassen, und das ist nur mit empirischen Methoden möglich. Beides gehört zusammen, wie bei jedem Versuch zur Lösung eines Problems Fragen, Hypothesen, Lösungsansätze, Überprüfung, kritische Analyse und Einordnung der Antworten zusammengehören.

Die wechselseitige Verzahnung ist unauflöslich. Ohne den Bezug zu einer tragfähigen Theorie verlieren empirische Ansätze ihre Relevanz, laufen oft gar ins Uferlose und damit Gefahr, zum Selbstzweck zu werden und nur noch Belanglosigkeiten hochsignifikant nachzuweisen. Andererseits stützen sich unsere Vorstellungen von dem im Unterricht Möglichen, Sinnvollen, Notwendigen doch auf praktische Erfahrungen (angefangen bei sehr naiven), auf Ergebnisse der Lern- und Entwicklungspsychologie, auf die Analyse sozialer Randbedingungen des Lernens und vieles andere. Auf diesen Wurzeln wachsen didaktische Theorien, die dann wiederum überprüft und gegebenenfalls verändert, verfeinert, erweitert werden. Dabei ergeben sich neue Fragen, denen empirisch nachgegangen werden kann. Fast jedes theoretische Konzept ist entstanden als Konzentrat von Erfahrungen, gezielten Beobachtungen, Untersuchungen und ist damit das Ergebnis einer - wenn auch meist noch nicht sytematisierten - Empirie. Mit seiner Formulierung ist kein Endzustand erreicht, sondern es muß seine Relevanz für bestimmte Altersgruppen und bei verschiedenen Unterrichtsinhalten ebenso geklärt werden wie die Verträglichkeit mit anderen Konzepten. (Das Vorgehen erinnert etwa an die Entwicklung eines Medikamentes. Es wird ja auch im Normalfall nicht durch blindes Experimentieren gefunden. Die Wahrscheinlichkeit zu seiner Entdeckung ist umso größer, je mehr man über die zu behandelnde Krankheit, ihre Ursachen und Symptome weiß, je umfassender und prägnanter die Theorie ist. Hat man bei dieser gezielten Suche ein erfolgversprechendes Mittel gefunden, so muß es mit anderen verglichen, verbessert, auf Nebenwirkungen hin untersucht werden, seine Brauchbarkeit für "ähnliche" Krankheiten muß nachgewiesen werden u.v.a.m. Niemand würde auf den Gedanken kommen, Theorie und Empirie zu trennen oder gar gegeneinander auszuspielen.)

(2) Neue Probleme ergeben sich bei der Frage, wie man nun experimentell zu brauchbaren Ergebnissen kommt. Daß die Einbettung in einen stabilen theoretischen Rahmen eine notwendige Voraussetzung ist, haben wir bereits erwähnt. Die Umsetzung von Vermutungen in Hypothesen und angemessene Versuchspläne allerdings ist ein weiterer Schritt, der erhebliche Mühe macht und zur Zeit in ziemlich dunkles unerforschtes Gebiet führt, in dem es kaum Wegweiser und Hinweisschilder gibt, von gut ausgebauten Straßen ganz zu schweigen.

Besondere Schwierigkeiten treten dadurch auf, daß man es in der Unterrichtsforschung nicht mit Laborexperimenten zu tun hat, sondern eben mit Unterrichtsversuchen. Dies führt zu einer Vielzahl von "Störungen", zu oft nur schwer kontrollierbaren Randbedingungen und damit zu zusätzlicher Unschärfe, mit der die Aussagen behaftet sind. Versucht man dennoch, Unterrichtseffekte empirisch zu erfassen, so besteht nur dann Aussicht auf Erfolg, wenn man sich auf klar umrissene Fragen beschränkt. Dies führt zu einer Verengung des Blickfeldes, bei der zwangsläufig andere Aspekte - vielleicht ebenso wichtige - ausgeblendet werden. Sie werden nicht vergessen, sondern für den Augenblick zurückgestellt. Selbstverständlich kann ein Experiment allenfalls auf die "eingearbeiteten" Fragen Antworten geben und so nur einzelne Züge des Lernens und Denkens freilegen.

Endlich stellt sich leider heraus, daß Versuche dieser Art oft mühsam und schwerfällig sind, ganz selten nur die Eleganz aufweisen, mit der sich über Probleme des Unterrichts reden läßt.

(3) Vor diesem Hintergrund müssen die unten beschriebenen Versuche gesehen werden. An vielen Stellen stößt man auf erhebliche Schwierigkeiten. Die Feststellung, daß der theoretische Unterbau, Forschungshypothesen und Meß-

instrumente weitgehend fehlen, gilt auch für diesen Teil unserer Untersuchungen. Unterrichtspraktische Probleme kommen nun noch hinzu. Dies alles hat zur Folge, daß wir an zahlreichen Stellen auf Vermutungen angewiesen sind, mal einen Schritt in diese, mal in jene Richtung tun und die Bemühungen kaum mehr als tastende Versuche sind. Wir sind gezwungen, eine Vielzahl von Fragen beiseite zu schieben in der Hoffnung, auf wenige eine Antwort zu finden - wegen zeitlicher, personeller und organisatorischer Randbedingungen ebenso wie wegen der Komplexität des Gegenstandes.
Was insgesamt dabei herauskommt, sind zwei Versuche, eine mögliche Förderung des Verhältnisdenkens durch Unterricht nachzuweisen. Bei dem ersten besteht die Unterweisung in einem Ausschnitt aus dem normalen Unterricht (Untersuchung 3), bei dem zweiten - darauf aufbauenden - werden Unterricht und Test erheblich gezielter konzipiert (Untersuchung 4).

Wieder wählen wir für die verwendeten Testaufgaben Situationen, in denen Größenpaare bezüglich ihrer Verhältnisse zu vergleichen sind. Fragestellungen dieser Art sind hinreichend komplex, um zentrale Aspekte des Bruchbegriffs zu erfassen, zugleich sind sie aber auch für Verhältnisüberlegungen typisch, da fast alle Verhältnisfragen in einer solchen Form erscheinen oder in sie übersetzbar sind. Endlich sind sie "zugangsneutral": Sie müssen bewältigt werden, wie auch immer man zu den Bruchzahlen kommt.

4.2 Umgang mit Bruchoperatoren und Auswirkungen auf das Verhältnisdenken (Untersuchung 2)

4.2.1 Zur Planung des Versuchs

Die Frage, um die es uns hier geht, scheint nicht besonders tückisch: Kann man Begriffsentwicklung durch "einschlägigen" Unterricht fördern? Auf unser Problem zugeschnitten: Hat Unterricht, in dem Kinder Erfahrungen zu Brüchen machen, einen nachweisbaren Einfluß auf ihre Fähigkeit, richtige Verhältnisentscheidungen zu treffen?

Wir haben für diese Untersuchung drei Klassen des 6. Jahrgangs ausgewählt, weil uns in dieser Altersstufe die Chance am größten scheint, eine Förderung des Verhältnisdenkens zu erzielen. Es handelt sich um Schüler einer Gesamtschule, die noch keinen Bruchrechenkurs durchlaufen hatten. Die Wahl von Gesamtschulkindern hat zwei Gründe. Zum einen hat sich in vorangegangenen Versuchen gezeigt, daß sich Kinder gleichen Alters erheblich in den zu erfassenden Leistungen unterscheiden können (etwa Gymnasiasten und Hauptschüler). Gesamtschulklassen sind so wohl am ehesten als breite und repräsentative Auswahl anzusehen. Der zweite Grund ist sehr praktischer Natur: Es ist äußerst schwierig, Klassen zu finden, in denen man eigene Vorstellungen unterrichtlich verwirklichen kann, man kommt kaum umhin, den "normalen" Unterrichtsablauf einzubeziehen. Unter diesem Aspekt aber eignen sich für unsere Pläne weder traditionelle Bruchrechenprogramme in Hauptschulklassen noch Unterricht gymnasialer Prägung. Am engsten verwandt mit Verhältnis- und Anteilproblemen, wie sie in den vorgelegten Aufgaben zu lösen sind, erscheint ein auf Operatoren aufgebauter Bruchrechenkurs. Dabei stehen nämlich gerade Überlegungen im Mittelpunkt, die etwa bei Wahrscheinlichkeitsvergleichen notwendig oder nützlich sind.
Wir haben daher die Möglichkeit genutzt, in drei Klassen den von uns erarbeiteten Test vor und nach einer etwa

vierwöchigen Unterrichtseinheit "Bruchoperatoren I" durchführen zu können. Sie war in Zusammenarbeit mit Gesamtschullehrern entwickelt worden und sollte zu den üblichen Lernzielen führen, die sich bei der Arbeit mit Streck- und Stauchoperatoren (Größenbereiche: Länge, Anzahl, Flächeninhalt) ergeben. Verknüpfungen von Bruchoperatoren waren noch nicht mit einbezogen. Die Schüler sollten lernen, zu Operatoren Ein-/Ausgaben zu finden, verschiedene Größenpaare zu einem Operator anzugeben, zu Größenpaaren passende Operatoren zu suchen, Operatoren nach ihrer Wirksamkeit zu vergleichen, insbesondere Operatoren durch gleichwertige zu ersetzen. Ein großer Teil der Aktivitäten bestand dabei im Aufteilen, Einfärben, Vergleichen von Flächen. Allerdings wurde keine Beziehung zu Wahrscheinlichkeitsüberlegungen hergestellt. Im Verlauf dieser Unterrichtseinheit hatten die Schüler - so dachten wir - Gelegenheit, alle die Fähigkeiten zu erwerben, die zur Beantwortung der Testfragen notwendig sind. (Daß es dann doch nicht so war, werden die Ergebnisse zeigen.)

4.2.2 Ergebnisse

Der erste Teil des Tests enthält 26 Aufgaben zum Vergleich von Spielfeldern nach ihren Gewinnchancen. (Sie entsprechen den in der Untersuchung 1 genauer beschriebenen Spielfeldaufgaben.)
Der Schwierigkeitsgrad ist ziemlich unterschiedlich, unter anderem auch dadurch, daß bei einigen der Aufgaben die Felder mit geeigneten Rastern versehen sind, bei anderen nicht. Im zweiten Teil sind die Aufgaben (19) schon als "Anzahlprobleme" vorgegeben.
Die Tabelle 4.1 enthält die wichtigsten Ergebnisse.

	Zahl der Aufgaben	VORTEST		NACHTEST	
		Mittelwert	Proz.	Mittelwert	Proz.
Teil I	26	12,0	46,2	12,9	49,6
Teil II	19	8,5	44,8	9,0	47,6
Gesamt	45	20,5	45,6	21,9	48,7

Tab. 4.1: Ergebnisse des Gesamtschulversuchs

Von den 85 im Vortest erfaßten Kindern schieden sechs im Verlaufe des Versuchs aus. Die Ergebnisse beziehen sich auf die verbliebenen 79 Kinder. Man erkennt auch ohne eingehende Analyse, daß keine bedeutsamen Verbesserungen eingetreten sind. Obwohl der Test hinreichend reliabel ist (innere Konsistenz $r_{tt} = 0{,}71$), zeigen sich kaum Unterschiede zwischen Vor- und Nachtest.

Prüft man den Zuwachs auf Signifikanz (t-Test für korrelierende Stichproben, vgl. CLAUSS-EBNER, 1967, S. 217ff), so erhält man für den Gesamttest einen t-Wert von $t = 1{,}46$. Damit kann die Nullhypothese ("Der Mittelwert der Differenzen ist nicht von Null verschieden") auf dem 0,05 -Niveau nicht zurückgewiesen werden. Begnügt man sich mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10 %, so gelingt dies zwar, damit aber hat man kaum mehr als einen Trend zur Verbesserung nachgewiesen, der wohl vor allem als Testwiederholungseffekt angesehen werden muß. Daneben findet man unter der Vielzahl von Aufgaben einige signifikante Einzelbewegungen. Dies kann allerdings nicht darüber hinwegtäuschen, daß sich ein deutlicher Lernzuwachs - trotz relativ großer Zahl von Versuchspersonen und einer mehrwöchigen Unterrichtsreihe - nicht eingestellt hat.

4.2.3 Folgerungen und Fragen

(1) Angesichts dieses - für uns äußerst überraschenden - Ergebnisses werden Feinanalysen ziemlich fruchtlos. Wir hatten die skizzierte Untersuchung zunächst als einen Baustein in einem umfassenderen Versuchsplan konzipiert. Es muß betont werden, daß selbst ein hochsignifikanter Zuwachs in unserem Versuch ja noch durchaus nicht die Schlußfolgerung erlaubt hätte, daß dies ein Erfolg des Unterrichts gewesen wäre. Zu einer solchen Aussage hätte erst der Vergleich mit einer Kontrollgruppe berechtigen können, mit deren Hilfe sich der der

bloßen Testwiederholung zuzuschreibende Lernzuwachs abschätzen ließe.

Aus den zahlreichen Konjunktiven wird bereits klar, daß wir den Versuch nicht wie geplant fortgeführt haben. Das geschilderte Ergebnis verstellt jede Aussicht auf sinnvolle weitere Aussagen. Dennoch sollen einige der Fragen, die wir beantworten wollten, notiert werden. Sie werden im weiteren in ähnlicher Form wieder erscheinen.

- Unterscheiden sich Kinder verschiedenen Alters im Lernzuwachs?
- Sind verschiedene Kurse unterschiedlich wirksam (etwa traditionelle Bruchrechenkurse im Vergleich mit Operatorkursen)?
- Gibt es Unterschiede bei verschiedenen Fragestellungen, die in den Testaufgaben verwendet werden?

(2) Dennoch wäre es falsch, das Ergebnis dieser Untersuchung nur negativ zu werten. Es zeigt auf, mit welchen Schwierigkeiten der Versuch behaftet ist, eine Förderung begrifflicher Fähigkeiten durch Unterricht nachzuweisen, und ist so zumindest als Hintergrund für unsere weiteren Überlegungen außerordentlich wertvoll.

Neben vielen Einzelfragen, die wir hier zurückstellen, tritt unser Hauptproblem nach diesem ("mißglückten") Versuch noch deutlicher hervor. Ist Förderung des Verhältnisdenkens "auf breiter Front" überhaupt möglich? Oder bedarf es gezielter Bemühungen - jeweils ausgerichtet auf gewisse Sachbereiche (etwa Wahrscheinlichkeitsfragen, Mischungsprobleme, Vergrößern/Verkleinern, ...)? Dabei bieten sich diese Ausgangspunkte für empirische Untersuchungen an:

- Man inszeniert Unterweisung zu einem eng umschriebenen Lehrplanausschnitt und weist Fortschritte bezüg-

lich der im Unterricht behandelten Lernziele nach. Dies würde in unserem Fall bedeuten, daß nach einer Unterrichtseinheit aus der Bruchrechnung auch Bruchrechenfertigkeiten abgetestet werden. Das aber ist nicht unsere Kernfrage, da dabei völlig offen bleibt, ob auch Verhältnisdenken über die speziellen Lernziele hinaus vorangetrieben worden ist.

- Eine andere Möglichkeit besteht darin, daß man sich im Test und in der Lernphase (wie etwa FISCHBEIN u.a., 1970) auf eine ausgewählte Fragestellung beschränkt. Doch auch so kann man nichts mehr über Transfer aussagen.
- Ein Ausweg könnte darin bestehen, daß man den Unterricht zwar an den im Test zu lösenden Aufgaben orientiert, bei diesen aber einen hinreichend großen Spielraum läßt, um die Ausstrahlung der Unterweisung auf mehr oder weniger benachbarte Probleme verfolgen zu können. Einen solchen Versuch werden wir nun beschreiben.

4.3 Förderung von Begriffsentwicklung durch gezielten Unterricht (Untersuchung 4)

4.3.1 Testkonstruktion und Versuchsplanung

4.3.1.1 Beschreibung des Tests

Der im Versuch verwendete Test zum Verhältnisbegriff besteht aus 36 Aufgaben, die jeweils drei Wahlmöglichkeiten zulassen, von denen eine richtig ist.
Die Aufgaben lassen sich in eine 6 x 6 -Matrix einordnen, so daß sie zeilenweise in der Fragestellung ("Sachsituation"), spaltenweise in den zu vergleichenden Verhältnissen übereinstimmen.

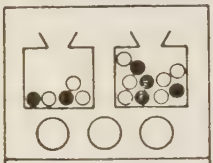
Sachsituationen \ Verhältnisse	V 1	V 2	V 3	V 4	V 5	V 6
	$\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$ $\frac{3}{5}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{4}{10}$	$\frac{4}{5}$ $\frac{7}{10}$	$\frac{2}{4}$ $\frac{4}{7}$
Z 1 Urnen	1	2	3	4	5	6
Z 2 Spielfelder	7	8	9	10	11	12
Z 3 Spielbahnen	13	14	15	16	17	18
Z 4 Gläser	19	20	21	22	23	24
Z 5 Meßbecher	25	26	27	28	29	30
Z 6 Meßskalen	31	32	33	34	35	36

Tab. 4.2: Übersicht über die Testaufgaben

In den Zeilen Z 1/2/3 werden Wahrscheinlichkeitsfragestellungen, in den letzten drei Zeilen Mischungsaufgaben verwendet (M- bzw. W-Aufgaben). Bei den Aufgaben der ersten drei Spalten läßt sich der Verhältnisvergleich auf geschickten Anzahlvergleich reduzieren, während bei den übrigen die Erfassung verhältnisgleicher Zahlenpaare notwendig ist (A- bzw. V-Aufgaben).

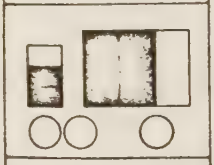
Bei dieser groben Klassifikation wird zunächst einmal davon abgesehen, daß es weitere - möglicherweise relevante - Unterschiede zwischen den Zeilen bzw. Spalten gibt. So etwa unterscheiden sich Z 1 und Z 4 von den übrigen darin, daß bei den entsprechenden Aufgaben bereits gleich große Teile vorgegeben sind, während bei allen anderen Aufgaben eine zusätzliche Anforderung darin besteht, zunächst von der Größe der Teile zu abstrahieren.

Einige Musteraufgaben (stark verkleinert) mit Kurzfassungen der Anweisungen zeigt Abb. 4.1.



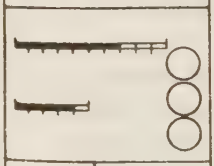
Z 1
V 4

Schwarz gewinnt. Welche Lostrommel ist besser?
(Hältst du beide für gleich gut, setze das Kreuz in die Mitte.)



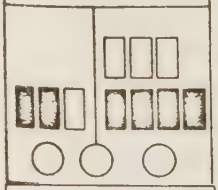
Z 2
V 1

Auf eins der Felder wird blind eine Kugel geworfen.
Schwarz ist Gewinnfarbe.
Welches Feld ist besser?



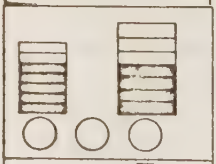
Z 3
V 5

Auf diesen Bahnen rollt eine Kugel. Schwarz gewinnt.
Welche Bahn ist besser?



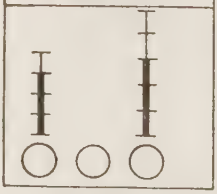
Z 4
V 6

Hier sind Gläser mit Sirup und Wasser. Aus den Gläsern, die du links siehst, wird Saft gemischt, ebenso rechts.
Welche Mischung wird süßer?



Z 5
V 2

Der Sirup ist bereits eingefüllt. Beide Gläser werden bis zum Rand mit Wasser aufgefüllt.
Welcher Saft wird süßer?



Z 6
V 3

Hier sieht man nur noch die Meßskalen der Gläser.
Welcher Saft wird süßer?

Abb. 4.1: Testaufgaben und -anweisungen: Beispiele

4.3.1.2 Zur Durchführung des Versuchs

(1) Der beschriebene Test wird in 9 Klassen jeweils als Vor- und Nachtest durchgeführt, je drei Klassen aus dem 4. (Grundschule), 5. und 6. (Realschule) Schuljahr. Eine Klasse dient in jeder Stufe als Kontrollgruppe, die beiden anderen werden zwischen den beiden Testdurchführungen etwa 8 Stunden lang unterrichtet.

Diese "unterrichtliche Behandlung" erfolgt in zwei verschiedenen Formen, denen zwei didaktische Ansätze zugrunde liegen. Es bedeutet:

K Kontrollgruppe,
N Behandlung 1 ("ohne Operatoraspekt"),
O Behandlung 2 ("mit Operatoraspekt").

(2) Wichtig ist, daß im Unterricht nur solche Aufgaben behandelt werden, wie sie in den Zeilen Z 1 und Z 2 vorkommen. Auf diese Weise hoffen wir, Transfereffekte nachweisen zu können: einmal - durch Vergleich des Lernzuwachses Z 1/2 gegen Z 3 - Transfer auf andere Darstellungen innerhalb von Wahrscheinlichkeitsüberlegungen, zum anderen auf Sachsituationen und Fragestellungen, die im Unterricht gar nicht angesprochen werden (Vergleich der M- und W-Aufgaben).

4.3.1.3 Hypothesen

(1) Der Versuch ist so angelegt, daß er zahlreiche Hypothesen (vor allem für Mittelwerte und Mittelwertdifferenzen) zu überprüfen gestattet. Sie können für die Gesamtstichprobe, für einzelne Klassen, für einzelne Jahrgänge, getrennt nach M-/W-Aufgaben, nach A-/V-Aufgaben oder für Zeilen- und Spaltensummen formuliert werden. Da es vorwiegend um eine Analyse der Lernzuwächse geht, werden in den meisten Fällen die Differenzen von Nach- und Vortestergebnissen benötigt.

(2) Hypothesen zum Vortest:

Ho 1: Die Mittelwerte der drei Klassenstufen unterscheiden sich nicht.

Ho 2: Zwischen den verschiedenen Spalten gibt es keine Schwierigkeitsunterschiede; insbesondere: A- und V-Aufgaben sind gleich schwierig.

Ho 3: Zwischen den verschiedenen Zeilen gibt es keine Schwierigkeitsunterschiede; insbesondere: M- und W-Aufgaben haben gleichen Schwierigkeitsgrad.

(3) Hypothesen zum Effekt des Unterrichts:

Ho 4: Der Lernzuwachs in den einzelnen Versuchsgruppen unterscheidet sich nicht von dem der entsprechenden Kontrollgruppe.

Ho 5: Im mittleren Zuwachs gibt es keinen Unterschied zwischen den Unterrichtsansätzen ("Methoden") O und N.

Ho 5': Es treten keine Wechselwirkungen zwischen Klassenstufe und Art des Unterrichts auf.

Ho 6: In den Lerngewinnen gibt es keine Unterschiede zwischen den Klassenstufen.

Speziell zur Erfassung des Transfers gehen wir von folgenden Nullhypothesen aus:

Ho 7: Der Lernzuwachs bei den M-Aufgaben unterscheidet sich nicht von dem bei den W-Aufgaben.

Als Verschärfung:

Ho 8: Bei allen Aufgabentypen (Zeilen) zeigen sich gleich große Fortschritte.

4.3.2 Beschreibung der Unterrichtsreihen

Bei der Planung und Durchführung der Unterrichtsreihen waren uns sowohl bezüglich der Inhalte wie auch des zeitlichen Umfangs enge Grenzen gesetzt. Wir waren froh, als wir nach langem Suchen Klassen gefunden hatten, in denen wir je acht Stunden Unterricht zum Thema "Erfahrungen zum Verhältnisbegriff an einfachen Beispielen von Wahrscheinlichkeitsvergleichen" durchführen konnten.

Die beiden Unterrichtseinheiten (N- und O-Kurs) werden wir nebeneinander skizzieren, da so leichter zu erkennen ist, wo und wie weit sich die Wege trennen. Selbstverständlich müssen beide Einheiten vergleichbar sein, jedoch verlaufen sie nicht immer ganz synchron. Die Schilderungen sollen keine Stundenentwürfe darstellen, sondern den Gang der Überlegungen erkennen lassen. An zahlreichen Stellen entdeckt man Verbindungen zur Analyse der Zugänge zum Bruchbegriff, wie sie in Kap. 1 ausgeführt ist. Auf entsprechende Hinweise im Einzelfall werden wir verzichten.

1.STUNDE: Vortest

2.STUNDE: Spiele zum Vergleich von Urnen

Die Kinder führen wiederholte Ziehungen aus verschiedenen Urnen durch. Die Arbeit erfolgt in kleinen Gruppen. Die Ergebnisse werden notiert und gesammelt. Erste Aussagen (oder Vermutungen) zum Urnenvergleich werden festgehalten.

3.STUNDE: Vergleich von Urnen in einfachen Fällen

Hier geht es um Chancenvergleiche, die noch im Vorfeld des Verhältnisbegriffs bleiben. Die zu vergleichenden Urnen haben gleiche Gesamtzahl von Kugeln oder gleiche Anzahl von Gewinnkugeln. (Die Testaufgaben werden bewußt ausgespart.)

Fall 1: Gleiche Gesamtzahl in beiden Urnen.[1)]

Fall 2: Gleiche Anzahl Gewinnkugeln in beiden Urnen.

Die Kinder vergleichen Urnen, färben Kugeln passend ein, bilden Ketten nach der Güte.

Die Ergebnisse dieser Stunde:

1. Eine Urne wird besser, wenn wir Nieten zu Gewinnkugeln umfärben. Oder (als Formulierung des Endzustandes): Bei gleicher Gesamtzahl ist die Urne besser, die mehr Gewinner enthält.

2. Eine Urne wird schlechter, wenn weitere Nieten hinzukommen. Oder: Bei gleicher Zahl von Gewinnern ist die Urne schlechter, die mehr Kugeln insgesamt enthält.

Diese Einsichten werden als wichtige Bausteine für weitere Erkenntnisse benötigt (ebenso wie die der Stunde 4). Sie können als kognitive "Substrukturen" des Verhältnisbegriffs angesehen werden.

4.STUNDE: Erzeugung von gleich guten Urnen

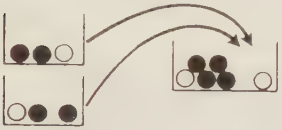
Hier trennen sich erstmals die Wege der beiden Kurse. Sie unterscheiden sich in der Art der Erzeugung gleichwertiger Urnen.

---

1) Die Verwendung der Zeichen "<" und ">" wurde von den Kindern selbst vorgeschlagen. Wir haben daher darauf verzichtet, neue Zeichen einzuführen, um so deutlich zu machen, daß es nicht um den Vergleich von Zahlen geht.

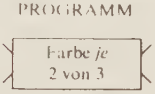
Aktivitäten zur Herstellung äquivalenter Urnen

Schüttet man gleiche Urnen zusammen, so erhält man immer wieder gleich gute Urnen.
Beispiel:



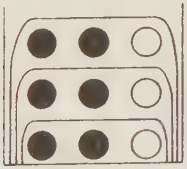
Ergebnis:
Alle so aus dem gleichen Baustein erzeugbaren Urnen sind gleich gut.

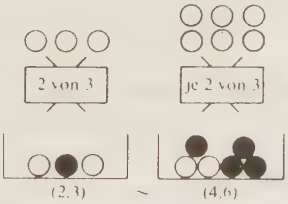
Im Operatorkurs werden zusätzlich Färbemaschinen vorgestellt, mit denen man Urnen herstellen kann.
Beispiel:



Ergebnis:
Alle von einer Maschine hergestellten Urnen sind gleich gut.

Man erhält so beliebig viele Urnen, die genau so gut sind wie die 2-von-3-Urne:





Aktivitäten der Kinder:
- Herstellen äquivalenter Urnen,
- Erstellen von Tabellen,
- Klassifizieren vorgegebener Urnen.

Zwei Anmerkungen:
- Obwohl hier bereits "Maschinen" auftreten, sind diese noch nicht mit "Bruchoperatoren" identisch. "Je 2-von-3" - Maschinen beschreiben den Aufbau von Urnen

noch ohne Divisionsoperatoren. Allerdings kommt man leicht zu einem neuen Programm für den Herstellungsprozeß:

Sieht man nur auf die Ein- und Ausgaben, so ist diese Maschine von ihrem Vorgänger nicht zu unterscheiden. Wohl aber stehen "hinter" ihrer Konstruktion deutlich andere Überlegungen, im Innern der Maschine sieht es anders aus. Die unterschiedliche Arbeitsweise erkennt man, wenn man etwa fünfzehn Kugeln eingibt.

Programm 1:

Die Maschine nimmt je 3 Kugeln, 2 davon färbt sie. Sie arbeitet spaltenweise.

Programm 2:

Die Maschine färbt gleich zeilenweise. Das Verfahren wird dadurch vereinfacht.

- Eine wiederholt von den Kindern gestellte Frage: "Gibt es überhaupt solche Maschinen?" Wir waren zunächst überrascht von der Hartnäckigkeit, mit der sie

eine befriedigende Antwort verlangten. Hatten wir die Kinder unterschätzt und ihnen so kluge Fragen nicht zugetraut? Hinter der Frage steckt mehr als bloße Neugier, sie zwingt auch den Lehrer zu gründlicherem Nachdenken.

Wie sieht sie nun also aus, eine 3-von-5 - Maschine?

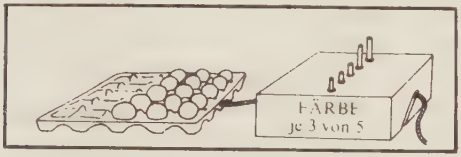


Abb.4.2: Eine "3-von-5- Maschine"

Nach einiger Konstruktionsarbeit ergab sich dieser Prototyp: Die Kugeln (sehr zu empfehlen sind Mandarinen - man hat keine Mühe mit dem Abtransport) werden auf einem Eierkarton in Fünferreihen sortiert, das Ganze zieht man an einem langen Faden durch einen passenden Kasten. In diesem befinden sich zylindrische Stecker, an deren Enden kleine Schwämmchen angebracht sind, die man mit Farbe tränken kann. Drückt man 3 von 5 Tasten, so hat man gerade eine "je 3-von-5 - Maschine". In jeder Fünferreihe werden 3 Mandarinen gefärbt.

Die beschriebene Maschine bleibt noch eng am Urnenherstellungsprozeß, wie die Kinder ihn in den ersten Stunden kennengelernt haben. Die oben skizzierte Umdeutung führt dagegen einen erheblichen Schritt weiter. Die Färbemaschine wird zu einer Rechenmaschine. Diese Entdeckung gelang den Kindern am Ende der Stunde. Nachdem sie an vielen Beispielen die Ausgaben vorherzusagen versuchten und die Ergebnisse in Tabellen festhielten, merkten die Kinder, daß alle Antworten auch durch einfache Rechnung erhalten werden konnten. Um diese Einsicht zu fördern, haben wir den Kindern ein Bild vorgelegt, auf dem 60 Kugeln von einer "je 3-von-5 - Maschine" verarbeitet werden sollten. Die einen versuchten noch, in den zwölf Fünferreihen je drei Kugeln zu färben, die anderen stellten fest, daß sich dieses Problem

sehr viel schneller lösen läßt, wenn man zunächst den fünften Teil von 60 ausrechnet und diesen dann verdreifacht. So wurde aus unserer Maschine eine (:5) (·3)-Maschine. Ein entsprechendes Schild wurde auf die Rückseite des Kastens geklebt. "Färbe je 3 von 5" und (:5) (·3) sind lediglich zwei verschiedene Programme für die gleiche Maschine.

Eine 3-von-5 - Maschine, die von den Kindern selbst entwickelt und vorgestellt wurde, war etwas aufwendiger konstruiert: Vier Kinder verließen den Klassenraum, drei schoben ein wenig später eine große Möbelkiste herein. In sie gab man 5 weiße Kugeln ein und nach einiger Zeit kamen 3 schwarze und 2 weiße wieder heraus. Je mehr Kugeln man hineingab, desto länger dauerte es - aber die Maschine funktionierte, und der Spaß war groß.

5./6.STUNDE: Vergleiche mit Hilfsurnen

Daß die bisher entwickelten Regeln zum Vergleich von beliebigen Lostrommeln nicht ausreichen, wird sehr schnell deutlich. Schon eine 1-von-3 - und eine 4-von-9 - Urne sind mit den verfügbaren Mitteln nicht mehr vergleichbar. Wir haben ja noch keine Ordnungsrelation definiert, die je zwei Zahlenpaare (Urnen) zu vergleichen gestattet. Während bei der mathematischen Konstruktion der Bruchzahlen zunächst Klassen von Zahlenpaaren gebildet, diese Klassen dann mit einer Ordnungsstruktur versehen werden (wobei nur die Repräsentantenunabhängigkeit nachträglich sichergestellt wird), gehen wir einen anderen Weg, der natürlicher ist, auch wenn er das Problem des Vergleichens nicht in einem Zugriff löst. Die Kinder vergleichen zunächst Urnen in einfachen Fällen, überall da, wo sie auf solche treffen. Allerdings ist die Möglichkeit, auf diese Weise Ordnung zu schaffen, noch recht beschränkt. Eine erhebliche Erweiterung gelingt erst, wenn die beiden bisher entwickelten Grundfähigkeiten zugleich eingesetzt werden. Dies führt zu einem Verfahren, bei dem weitere

Lostrommeln hinzugezogen werden, mit deren Hilfe das Vergleichsproblem in mehreren Schritten gelöst werden kann.

Entsprechend werden in der 5. Stunde die bisher erworbenen Einzelfähigkeiten zusammengebaut - in der Hoffnung, so zur Kombination, Koordination und Interaktion der kognitiven Substrukturen zu gelangen. Auch hierbei können wir aus der Vielfalt der Möglichkeiten nur einen kleinen Ausschnitt realisieren. Einige der Aktivitäten sollen skizziert werden. Zunächst werden zu zwei Urnen gleich gute gesucht und in Tabellen notiert:

1-von-3	
1	3
2	6
3	9
4	12
6	18
8	24
.	.

4-von-9	
4	9
8	18
12	27
16	32
.	.
.	.
.	.

Die Kinder stellen fest, daß alle Urnen aus der linken Tabelle gleich gut sind, ebenso alle Urnen aus der rechten Tabelle. Sie kommen schnell zu weiteren Aussagen, die sich auf bereits vorhandene Kenntnisse stützen:

3-von-9	<	4-von-9
4-von-12	<	4-von-9
8-von-24	<	8-von-18
6-von-18	<	8-von-18

In allen Fällen stellt sich das Exemplar aus der linken Tabelle als schlechter heraus als das aus der rechten.

Was macht man, wenn man nicht gerade solch günstige Fälle vorfindet? Wie kann man begründen, daß eine 4-von-9-Urne besser ist als eine 2-von-6-Urne? Die Kinder fanden selbst den Vergleich auf Umwegen heraus: "2-von-6 ist ja genau so gut wie 4-von-12. Die ist aber schlechter als 4-von-9.

Dann muß auch 2-von-6 schlechter sein als 4-von-9."

Von hier aus ergeben sich zahlreiche weitere Fragen und Aufgabentypen. Ziel dieser Bemühungen ist die Erfahrung, daß man zu jedem vorgegebenen Paar von Urnen brauchbare Hilfsurnen finden kann. Ein Beispiel für einen recht schwierigen Vergleich mit zwei Hilfsurnen in der auch im Unterricht verwendeten Kurznotierung:

$(2,3) \sim (10,15) < (10,14) \sim (5,7)$.

Allerdings haben wir diese Erfahrungen nicht in Regeln festgehalten. (Man kann natürlich aus den Überlegungen leicht etwa einen Vergleichsalgorithmus entwickeln, der dem Gleichnamigmachen von Brüchen entspricht).

In den "Operator-Klassen" werden auch diese Ergebnisse in Operatorsprache übersetzt. Zunächst gehen wir davon aus, daß genau die Urnen gleich gut sind, die sich von der gleichen[1] Maschine herstellen lassen. Man kommt weiter von dem Vergleich von Urnen zum Vergleich von Maschinen: Von zwei Maschinen ist diejenige die bessere, die die besseren Urnen herstellt. Andererseits kann man nun Urnen über die sie erzeugenden Maschinen vergleichen. In einfachen Fällen wie beim Vergleich einer 1-von-3- mit einer 4-von-9-Urne geht das sehr leicht. Die (:3)-Maschine ist sicher schlechter als die (:9)(·4)-Maschine, da sie eine 3-von-9-Urne erzeugt. In vielen anderen Fällen dagegen hat man es schwerer. Wenn beispielsweise der Vergleich einer 2-von-5-Urne mit einer 3-von-7-Urne auf den Vergleich der erzeugenden Maschinen (:5)(·2) bzw. (:7)(·3) zurückgeführt wird, so braucht man geeignete Eingaben,

---

1) Dabei wurde das Problem, daß etwa den Maschinen (:3)(·2) und (:6)(·4) verschiedene Teilmengen von $\mathbb{N}$ als Definitionsbereich gehören, nicht erörtert. Zweifellos sind die beiden Maschinen als gleich gut anzusehen; um die Gleichheit der Abbildungen im strengen Sinne geht es hier nicht. Es treten keine Schwierigkeiten auf, wenn man jeweils die "einfachste" Maschine wählt.

die von beiden Maschinen verarbeitet werden können. Wählt man 35 Kugeln, so stellt die eine Maschine daraus eine 14-von-35-, die andere eine 15-von-35-Urne her. Die 2-von-5-Urne ist also schlechter. Bei dieser Beschreibung wird deutlich, daß das Operatorkonzept die Dinge zunächst sicherlich kaum erleichtert. Der Vergleich von Abbildungen läßt sich nur über den Vergleich von Größen vollziehen. Es könnte sein, daß dieser Operatoraspekt (viele der) Kinder eher verwirrt als ihnen hilft. Dennoch haben wir diesen Ansatz einbezogen, da Operatoren bei anderen Problemen die Arbeit durchaus erleichtern, etwa wenn es nicht um Anzahlen, sondern um Längen- und Flächeninhalte geht. Dies wird im folgenden skizziert.

7./8. STUNDE: Vergleich von Spielfeldern

In den beiden abschließenden Stunden werden die für Urnen gewonnenen Erkenntnisse auf eine andere Sachsituation übertragen. Die Wahrscheinlichkeitsfragestellung wird beibehalten. Die Aufgabe besteht nun darin, Spielfelder zu vergleichen, die zum Teil schwarz eingefärbt sind und auf die blind eine Kugel geworfen wird. Bleibt sie auf Schwarz liegen, hat man gewonnen. (Vgl. die in der Untersuchung 1 verwendeten Aufgaben.)

Es macht den Kindern keine Mühe, die für Urnen formulierten Regeln für den Vergleich in einfachen Fällen (gleich große schwarze, weiße oder Gesamtflächen auf den zu vergleichenden Feldern) auf die neue Sachsituation zu übertragen. Wie kommt man nun zu gleich guten Spielfeldern? Am einfachsten dadurch, daß man aus hinreichend vielen Kopien eines Feldes neue Felder durch Aneinanderlegen erzeugt. Abb. 4.3 zeigt einige Beispiele.

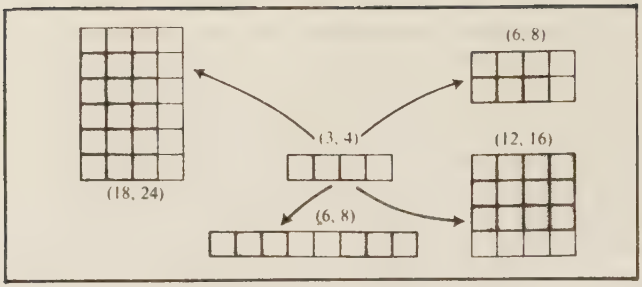


Abb.4.3: Erzeugung gleich guter Spielfelder

Die entstehenden Felder sind wiederum 3-von-4-Felder, man braucht nur das Raster geschickt zu wählen. Ergebnis: Alle so zu erzeugenden 3-von-4-Spielfelder sind gleich gut.

Es muß angemerkt werden, daß sich natürlich nicht jedes 3-von-4-Feld aus unserem Musterfeld herstellen läßt. Schon bei diesem Feld wird es schwierig, man muß es zunächst in Dreiecke zerlegen. Wählt man etwa eine Kreisscheibe als Spielfeld, so kommt man mit geschicktem Auslegen gar nicht mehr zurecht. Wir haben diese mit der im Größenbereich Flächeninhalt nicht vorhandenen Kommensurabilität zusammenhängenden Probleme im Unterricht nicht thematisiert. Verschärft man das oben erhaltene Ergebnis aber zu der Aussage "alle 3-von-4-Felder sind gleich gut", so ist dies eine zwar plausible, über die bisher gewonnenen Regeln jedoch hinausgehende Festlegung, die implizit ein Stückchen Operatordenken ins Spiel bringt.

In den Operator-Klassen gestaltet sich dieser Teil des Unterrichts erheblich einfacher. Die bei den Urnen verwendeten Maschinen bedürfen lediglich einer kleinen Änderung, sie werden zu Flächen-Färbe-Maschinen. Läßt man eine solche (:4) (·3) -Maschine arbeiten, so erzeugt sie die verschiedensten Spielfelder. Das Problem des

Aufbaus solcher Felder tritt dabei nicht mehr auf. In beiden Kursen ergeben sich eine Fülle von Aktivitäten zum Erstellen, Verändern, Vergleichen von Spielfeldern. In der letzten Stunde endlich wird auch für Spielfelder der "Vergleich auf Umwegen" durchgeführt. Als Beispiel:

9. STUNDE: Nachtest

4.3.3 Ergebnisse

4.3.3.1 Zur Testanalyse

Der Versuch liefert eine solche Fülle von Daten, daß wir uns bei der Analyse notwendig auf einige wichtige Fragen beschränken müssen.

Hinzu kommen erhebliche Schwierigkeiten bei der Datenverarbeitung. Diese lassen sich auf eine einfache Formel bringen. Entweder liegen Programme vor, die von Psychologen erstellt worden sind, aber oft keine Antworten auf didaktisch relevante Fragen geben - oder wir formulieren solche Fragen, aber brauchbare Programme fehlen. Auch dies ist ein typisches Problem in der Anfangsphase fachdidaktischer Unterrichtsforschung. Eine Lösung ist wohl nur zu erwarten, wenn im Verlaufe langfristiger Zusammenarbeit die Grundwissenschaftler mehr Verständnis für fachdidaktische Fragen, die Didaktiker mehr Einsicht in die Möglichkeiten empirischer Methoden gewinnen.

Als innere Konsistenz erhalten wir $r_{tt} = 0{,}81$, in den einzelnen Klassen ergeben sich Werte zwischen 0,75 und 0,88. Sie wird wieder nach der Formel von KUDER-RICHARDSON (vgl. LIENERT, 1969, S. 228) berechnet und dient

als Maß für die Reliabilität ("Zuverlässigkeit") des Meßinstrumentes Test. Sie ist in jedem Fall ausreichend für einen Test, der nur Unterschiede zwischen Gruppen aufdecken soll und keinesfalls als Mittel zur Einzeldiagnose verwendet wird.
Gegenüber den in vorhergehenden Untersuchungen verwendeten Testformen ist eine deutliche Verbesserung festzustellen.

Die maschinell erstellte Testanalyse zeigt, daß die Punktwerte im Vortest noch als normalverteilt angesehen werden können, so daß entsprechende Prüfverfahren herangezogen werden dürfen.

4.3.3.2 Ergebnisse des Vortests

Die Zahl der Kinder, die am gesamten Versuch (Vortest, Unterricht, Nachtest) teilgenommen haben, ist der Tabelle 4.3 zu entnehmen.
Kinder, die nur den Vortest oder den Nachtest mitgemacht haben, bleiben im folgenden unberücksichtigt.

	K	N	O	Gesamt
4	32	31	25	88
5	31	35	34	100
6	36	29	36	101
Ges.	99	95	95	289

Tab. 4.3: Anzahl der Kinder in den einzelnen Klassen

Stellt man die Ergebnisse im Vor- bzw. Nachtest sowie die Differenzen (jeweils in Prozent) zusammen, so erhält man die Tabelle 4.4.

		K	N	O	Gesamt	O/N
4	V	52,1	51,9	56,2	53,2	53,8
	N	59,9	74,3	75,1	-	74,7
	D	7,8	22,4	18,9	-	20,9
5	V	53,5	57,3	56,2	55,8	56,8
	N	63,2	84,1	77,3	-	80,8
	D	9,7	26,8	21,1	-	24,0
6	V	56,8	67,3	59,8	60,9	63,2
	N	69,0	92,6	90,3	-	91,3
	D	12,2	25,3	30,5		28,1
4/5/6	V	54,3	58,6	57,6	56,8	58,1
	N	64,2	83,5	81,7	-	82,6
	D	9,9	24,9	24,1		24,5

Tab. 4.4: Richtige Antworten im Vor- und Nachtest und zugehörige Differenzen (in Prozent)

Wir halten einige Ergebnisse fest. Die Hinweise zur statistischen Analyse und Überprüfung führen wir dabei nur in Stichworten auf, um die Verwirrung möglichst gering zu halten.

(1) Die Unterschiede in den Vortestleistungen zwischen den einzelnen Klassenstufen sind nur recht klein. Besonders gering sind sie zwischen den Klassenstufen 4 und 5, der 6. Jahrgang setzt sich von diesen deutlich ab.
Bei der Überprüfung mit Hilfe des parameterfreien U-Tests (vgl. CLAUSS/EBNER, 1967, S. 205) läßt sich die Nullhypothese Ho 1 nur beim Vergleich des 6. Jahrgangs mit den beiden anderen zurückweisen.

Es sei noch erwähnt, daß Kontroll- und Experimentalgruppen (O/N) durchaus vergleichbar sind. (Die Kontrollgruppen erreichen etwas höhere Mittelwerte.)

(2) Vergleicht man die Ergebnisse in den Aufgaben der Spalten V 1 - V 3 (Aufgaben, bei denen schon ein geschickter Anzahlvergleich zum Ziel führt:

"A-Aufgaben") mit denen der Spalten V 4 - V 6 (Aufgaben, die echte Verhältnisüberlegungen erfordern: "V-Aufgaben"), so zeigen sich sehr deutliche Unterschiede. (Tab. 4.5)

	A (V 1 - V 3)	V (V 4 - V 6)
4	69,9	36,5
5	70,5	41,0
6	75,0	46,9
Ges.	71,9	41,7

Tab. 4.5: Ergebnisse (in Prozent) für A- und V-Aufgaben

Die Unterschiede sind in jeder Klassenstufe und in der Gesamtstichprobe hochsignifikant. (WILCOXON-Test, vgl. CLAUSS/EBNER, 1967, S. 222ff.) Ho 2 kann damit zurückgewiesen werden.

(3) Weiter von Interesse ist die Frage, ob Unterschiede zwischen Wahrscheinlichkeits- und Mischungsaufgaben vorhanden sind. (Tab. 4.6)

	W (Z 1 - Z 3)	M (Z 4 - Z 6)
4	49,1	57,3
5	55,2	56,3
6	54,1	67,7
Ges.	[illegible]	60,6

Tab. 4.6: Ergebnisse (in Prozent) für M- und W-Aufgaben

Insgesamt stellt sich heraus, daß die W-Aufgaben durchweg etwas mehr Mühe machen als die M-Aufgaben. Dies könnte dadurch zu erklären sein, daß Erfahrungen zu Mischungsproblemen zahlreicher sind als mit Wahrscheinlichkeitsfragestellungen. Diese Vermutung wird gestützt durch die Tatsache, daß auch die Konsistenz im Mischungsteil etwas höher ist.

4.3.3.3 Vergleich der Ergebnisse im Vor- und Nachtest

Der eigentliche Zweck unseres Versuches liegt im Nachweis und in der Erfassung von Lerneffekten. Daher können interessante Ergebnisse erst bei der Analyse von Lerngewinnen (gemessen als Differenzen der Punktwerte zwischen Vor- und Nachtest) erwartet werden. Die statistische Verarbeitung solcher Differenzen bringt besondere Probleme mit sich, da Meßfehler und zufällige Abweichungen beider Einzelmessungen eingehen. Diese Schwierigkeiten hat man bei jedem Versuch, Veränderungen zu erfassen. Eine ausführliche Diskussion der Problematik des "measurement of change" findet man in dem von HARRIS (1963) herausgegebenen Band mit dem gleichen Titel. Dennoch scheint die von uns gewählte Verwendung von Rohwertdifferenzen vertretbar und für unsere Ansprüche ausreichend. Wir stützen uns dabei auf CAMPBELL/STANLEY (1970), die in ihrer Analyse von Versuchsplänen für die Unterrichtsforschung über die "Kontrollgruppenanordnung mit Vor- und Nachuntersuchung" ausführen:

> "Am meisten verwendet und am annehmbarsten ist ein Prüfverfahren, bei dem für jede Gruppe der Leistungszuwachs vom Vortest zum Nachtest berechnet und für diese Zuwachsrate der t-Test zwischen Experimental- und Kontrollgruppe bestimmt wird." (S. 504)

Einige der auf diese Weise gewonnenen Aussagen halten wir in den folgenden Punkten fest.

(4a) Jede der am Versuch beteiligten Klassen erreicht im Nachtest einen höheren Mittelwert als im Vortest. Diese Unterschiede sind - nach dem WILCOXON-Test - bei allen Experimentalgruppen hochsignifikant ($\alpha < 0{,}001$), sie sind aber auch bei den Kontrollgruppen noch signifikant ($\alpha < 0{,}05$).

Dieses Ergebnis ist nicht besonders überraschend. Schließlich haben alle E-Gruppen gezielten Unterricht erhalten, und auch bei den Kontrollgruppen ist es nicht verwunderlich, daß die Testwiederholung zu einer Verbesserung führt, die übrigens umso größer ist, je älter die Kinder sind. Immerhin bestätigt dieses Ergebnis zum einen, daß unser Test ein hinreichend empfindliches Meßinstrument darstellt, zum anderen zeigt es, wie unentbehrlich Kontrollgruppen in solchen Unterrichtsversuchen sind.

Weitergehend ist schon das nächste Ergebnis:

(4b) In jeder E-Gruppe ist der Lernzuwachs deutlich höher als in der entsprechenden Kontrollgruppe. Wieder kann man zur Signifikanzprüfung den U-Test einsetzen. Dabei erhält man u-Werte, die sämtlich größer als 2,7 sind. $u = 2{,}7$ ergibt sich bei dem Vergleich der Klassen K 4 O mit K 4 K. Die kritischen u-Werte bei einseitiger Fragestellung sind $u_{0,01} = 2{,}33$ bzw. $u_{0,001} = 3{,}09$.

Bemerkenswert ist, daß sich keine Unterschiede beim Vergleich beider Unterrichtsansätze zeigen:

(5) Die Zuwächse in den Operatorklassen und den Nicht-Operatorklassen sind etwa gleich groß.

In Verbindung mit Ergebnis (4) heißt dies: Beide Ansätze sind gleichermaßen wirksam und führen zu deutlichen Erfolgen. Vermutungen über die Hintergründe sind

problematisch. Es fällt jedoch auf, daß in den beiden Klassenstufen 4 und 5 die Lerngewinne in den Operatorklassen niedriger sind als in den anderen - die Operatoren scheinen für die jüngeren Kinder eher etwas störend und verwirrend zu sein. Erst in der 6. Klasse gibt es Anzeichen für die helfende Funktion der Operatoren. Die geringen Unterschiede rechtfertigen es, N- und O-Klassen in der noch folgenden Diskussion zusammenzufassen.

Da wir für die weiteren Analysen t-Tests heranziehen werden - die Differenzen von Meßwerten erlauben die Annahme der Normalverteilung - stellen wir in der folgenden Tabelle zunächst Mittelwerte und Standardabweichungen der Differenzen zusammen, für spätere Aussagen auch getrennt nach A-/V-Aufgaben bzw. M-/W-Aufgaben.

n	Klasse	Gesamt		V1-3		V4-6		Z1-3		Z4-6	
		d	sd	$\bar{d}$	sd	$\bar{d}$	sd	$\bar{d}$	sd	$\bar{d}$	sd
56	4 O/N	7,50	5,00	3,52	2,61	3,98	3,94	4,23	3,32	3,27	3,83
32	4 K	2,88	5,94	1,53	3,06	1,34	4,13	2,22	3,63	0,66	4,14
69	5 O/N	8,65	6,15	3,49	2,93	5,16	4,51	3,83	3,38	4,83	3,83
31	5 K	3,48	5,88	1,77	3,44	1,71	3,60	2,42	3,47	1,06	3,44
62	6 O/N	10,10	6,07	3,53	3,22	6,56	4,10	5,97	4,03	4,13	3,35
36	6 K	4,39	4,59	1,58	2,44	2,81	3,15	3,67	3,09	0,72	3,09
187	4/5/6 O/N	8,78	5,80	3,51	2,95	5,27	4,21	4,66	3,59	4,13	3,68
99	4/5/6 K	3,62	5,47	1,62	2,98	1,99	3,63	2,81	3,39	0,81	3,57

Tab. 4.7: Mittelwerte ($\bar{d}$) und Standardabweichungen (sd) der Differenzen

Zum weiteren Gebrauch notieren wir in Tab. 4.8 noch die t-Werte (jeweils für den Vergleich von Versuchs- und Kontrollgruppen).

Aufgaben / Klassen	Gesamt	V1-3	V4-6	Z1-3	Z4-6
4	3,89	3,23	2,97	2,64	2,98
5	3,94	2,57	3,75	1,91	4,69
6	4,88	3,18	4,73	2,95	4,99
4/5/6	7,35	5,14	6,68	4,25	7,32

Tab. 4.8: t-Werte für den Vergleich des Lernzuwachses in den Versuchsgruppen (O/N) mit dem der Kontrollgruppen

Man erkennt auch hier, daß die mittleren Lerngewinne der unterrichteten Gruppen in allen Fällen über denen der entsprechenden Kontrollgruppen liegen.
Das Ergebnis läßt sich noch verschärfen: Sowohl im Gesamtzuwachs als auch bei Trennung nach A- und V-Aufgaben ist der mittlere Lernzuwachs in den Experimentalgruppen größer als in den zugehörigen Kontrollgruppen. Dies bestätigt und ergänzt das Ergebnis (4). Als Prüfgröße für den t-Test für unabhängige Stichproben berechnet man:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$$

Dabei sind die $\bar{x}_i$ die Mittelwerte (hier der Differenzen aus Vor- und Nachtestergebnis) der zu vergleichenden Gruppen, n_i die Anzahl der Versuchspersonen, s eine Schätzung der Standardabweichung, berechnet als:

$$s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Man erhält die in der Tabelle 4.8 angegebenen t-Werte. Da der kritische t-Wert $t_{0,01} = 2,39$ ist, erweisen sich alle Mittelwertunterschiede bis auf eine Ausnahme als mindestens auf dem 0,01-Niveau signifikant.

(6) Der Erfolg des Unterrichts nimmt mit steigender Klassenstufe zu. Im t-Test zeigt sich bei der Analyse des Gesamtzuwachses ein signifikanter Unterschied nur zwischen den Klassenstufen 4 und 6, während er beim Vergleich benachbarter Klassenstufen nicht signifikant ist. (4/5 : t = 1,13, 5/6 : t = 1,36, 4/6 : t = 2,12)
Ein genauerer Vergleich zeigt weiter, daß der Zuwachs in den A-Aufgaben in allen drei Klassenstufen annähernd gleich ist, während der Zuwachs im V-Teil umso größer ist, je älter die Kinder sind. Beschränkt man die Überprüfung auf die V-Aufgaben, so ergeben sich signifikante Unterschiede beim Vergleich des 6. Jahrgangs mit den beiden anderen, während der Unterschied zwischen den zwei niedrigeren Stufen nicht signifikant ist. (4/5 : t = 1,54, 5/6 : t = 1,85, 4/6 : t = 3,47)

Vielleicht darf man dieses Ergebnis als Hinweis darauf deuten, daß die größte Lernbereitschaft bezüglich des Verhältnisdenkens im 6. Schuljahr vorliegt - genau da, wo einerseits traditionell der Schwerpunkt der Arbeit mit Brüchen liegt, andererseits die Schwelle zum Stadium formaler Operationen überschritten wird.

4.3.3.4 Zur Erfassung des Transfers

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich sehr einfach festhalten. In jeder Klassenstufe lernen die Kinder in den Versuchsgruppen deutlich mehr als die Kontrollgruppen, erst recht gilt dies, wenn wir die Klassenstufen zusammenfassen. (Die t-Werte sind in diesem Fall so hoch, daß selbst das 0,001 -Niveau noch unterboten wird.) Dieses Ergebnis allerdings gibt für die Frage nach dem Transfer nur recht wenig her. Zwar haben wir die im Test verwendeten Aufgaben im Unterricht (soweit eben möglich) nicht einbezogen, so daß die Kinder in jedem

Falle die im Unterricht gelernten Regeln auf neue Beispiele übertragen müssen. Dennoch ist dieser Transferanspruch relativ klein, da ja weitgehend gleiche Fragestellungen und Veranschaulichungen vorliegen. Weiter hilft uns die Aufspaltung der Ergebnisse nach Wahrscheinlichkeits- und Mischungsaufgaben. Dabei zeigt sich auch hier beim Vergleich der O/N - mit den K-Klassen ein Ergebnis, das gut in den Rahmen der bisherigen Aussagen paßt.

(7a) Sowohl in den W-Aufgaben wie in den M-Aufgaben ist der Lernzuwachs in jeder Klassenstufe in den Versuchsklassen höher als in den Kontrollklassen. Die t-Werte erreichen in allen Fällen den für das 0,05 -Niveau kritischen Wert, mit einer Ausnahme liegen sie weit darüber.

Dies ist ein klarer Beleg für einen Transfereffekt: Eine Steigerung in der Fähigkeit zu richtigen Verhältnisvergleichen tritt auch bei den Aufgaben ein, deren Fragestellung im Unterricht überhaupt nicht angesprochen worden ist. Vergleicht man darüberhinaus die Größe der Lerngewinne bei den W- bzw. M-Aufgaben, so erhält man:

(7b) Der Lernzuwachs ist - über alle beteiligten Versuchsklassen - bei den M- und W-Aufgaben annähernd gleich. In den 4. und 6. Klassen findet man einen höheren Zuwachs in den W-Aufgaben, in den 5. Klassen bei den M-Aufgaben. Wollen wir auch dieses Ergebnis statistisch überprüfen, so können wir den t-Test für abhängige Stichproben heranziehen. Die Nullhypothese heißt: Der Unterschied in den Lerngewinnen bei W- und M-Aufgaben ist Null.
Es werden also Differenzen von Differenzen analysiert. Man erhält diese t-Werte:
Gesamt: $t = 1{,}91$, 4. Klasse: $t = 1{,}40$,
5. Klasse: $t = 1{,}59$, 6. Klasse: $t = 3{,}39$.
Es zeigen sich also nicht-signifikante Vorteile der 4. Klassen in den W-Aufgaben, der 5. Klassen in den M-Aufgaben. Lediglich in den 6. Klassen liegen die Ergebnisse der W-Aufgaben signifikant ($\alpha < 0{,}001$)

höher. Führt man den Vergleich für alle Klassen durch, läßt sich die Nullhypothese noch auf dem 0,01 -Niveau zurückweisen.

Um möglichen Transfer genauer erfassen zu können, ist der Test so angelegt worden, daß sich Fragestellung oder/und Darstellung von Zeile zu Zeile unterscheiden. Es liegt daher nahe, die Lernzuwächse zeilenweise aufzuschlüsseln. Sie sind der Tabelle 4.9 zu entnehmen, ebenso die t-Werte für die Vergleiche zwischen O/N - und K-Gruppen.

n	Klasse		Z 1	Z 2	Z 3	Z 4	Z 5	Z 6
187	O/N 4-6	$\bar{d}$	2,01	1,32	1,33	1,26	1,40	1,47
		sd	1,58	1,72	1,74	1,35	1,73	1,73
99	K 4 6	$\bar{d}$	0,84	1,25	0,72	0,21	0,44	0,15
		sd	1,48	1,78	1,74	1,36	1,65	1,78
		t	6,07	0,32	2,82	6,25	4,54	6,06

Tab. 4.9: Lernzuwachs, aufgeschlüsselt nach den im Test verwendeten Fragestellungen

(8a) In allen Aufgabentypen (Zeilen) zeigen sich in den Versuchsklassen klare Verbesserungen. Mit einer Ausnahme (Zeile 2) liegen sie auch erheblich über denen der Kontrollgruppe. Signifikanzüberprüfung erfolgt wiederum mit dem t-Test. Für den ersten Teil der Aussage wird geprüft, ob der mittlere Zuwachs in den Versuchsklassen sich von Null, für den zweiten Teil, ob er sich signifikant von dem der Kontrollgruppen unterscheidet.

Dieses Ergebnis zeigt also, daß ein Anstieg in den Testergebnissen auch bei den Aufgaben zu verzeichnen ist, die in den Unterricht nicht einbezogen worden sind.

Endlich liegt die Frage nahe, ob die zu beobachtenden Unterschiede für die einzelnen Aufgabentypen (Zeilen) gleich groß sind. Schließlich handelt es sich ja um Aufgaben, die von den im Unterricht behandelten mehr oder weniger weit entfernt sind. Im Vergleich zu Z 1.

Z 2 (Urnen, Spielfelder) ändert sich bei Z 3 (Spielbahnen) nur die ikonische Darstellung, bei Z 4 und Z 5 nur die Fragestellung, bei Z 6 endlich beides.
Das Ergebnis ist etwas überraschend.

(8b) Der größte Zuwachs zeigt sich bei den Urnenaufgaben (Z 1), bei den übrigen ist er annähernd gleich. Das bedeutet, daß die deutlichste Verbesserung bei den Aufgaben eintritt, die auch im Unterricht im Mittelpunkt standen. Schon die Übertragung auf Spielfelder macht Mühe. Der Übergang zu anderen Fragestellungen und/oder Darstellungen allerdings führt nicht zu weiteren Schwierigkeiten. (Natürlich ist es auch möglich, daß sich der besonders deutliche Effekt bei den Urnenaufgaben nur deshalb zeigt, weil in diesen Aufgaben die Vortestergebnisse am niedrigsten liegen. Insgesamt werden die Schlußfolgerungen umso unsicherer, je weiter man den Test in Teile zerlegt.)

4.3.4 Diskussion der Ergebnisse

Überschaut man die vielfältigen Einzelergebnisse, so bietet sich ein ziemlich konsistentes Bild. Bei allen in den (zweiten) Unterrichtsversuch einbezogenen Klassen ist eine deutliche Leistungssteigerung in der Einschätzung von Verhältnissituationen festzustellen. Dieses Ergebnis erhält erst Gewicht, wenn es in der Verbindung mit dem in 4.2 skizzierten Gesamtschulversuch gesehen wird, der deutlich gemacht hat, daß solche Fortschritte - selbst nach einer längeren Unterrichtsphase - durchaus keine Selbstverständlichkeit sind. Sie fallen nicht gleichsam als Nebenprodukt bei jeder Art von Unterricht mit ab, sondern erfordern eine sorgfältig auf die angestrebten Ziele hin konzipierte Unterweisung. Unter dieser Voraussetzung besteht sogar die Aussicht, Lernfortschritte auch bei solchen Aufgaben anzuregen, zu denen keine gezielte Förderung angeboten wird.

Natürlich werfen auch diese Ergebnisse mehr Probleme auf. als sie lösen. Dabei ist allerdings zu bedenken, daß jede empirische Untersuchung Fragen nur in dem von den Versuchsbedingungen gesteckten Rahmen beantworten kann. Extrapolationen sind immer ein Wagnis. So etwa ist keineswegs erwiesen, daß der aufgedeckte Transfereffekt sich auf andere oder gar alle Aspekte des Verhältnisdenkens erstreckt. Eine solche Vermutung wäre wohl allzu optimistisch, die Erschließung weiterer Aspekte erfordert auch weitere Bemühungen.
Erst recht bleibt offen, in welchem Ausmaß Unterricht dazu beitragen kann, kognitive Strukturen wesentlich und nachhaltig zu beeinflussen. In jedem Fall ist eine enge und sinnvolle Verflechtung von Fragestellung, Unterricht und Test eine unabdingbare Voraussetzung für den Erfolg empirischer Untersuchungen, daher können diese kaum losgelöst von der Fachdidaktik durchgeführt werden.

5. ZUSAMMENFASSENDE SCHLUßBEMERKUNGEN

"Der Vorhang zu
und alle Fragen offen"

(B. Brecht, Der gute Mensch von Sezuan)

(1) Am Ende unserer Überlegungen kann gewiß kein selbstbewußtes "So wird's gemacht" stehen. Wir haben versucht, einige Beobachtungen zu sammeln - nur einen Ausschnitt aus den wichtigen oder gar möglichen - und ein wenig Ordnung in die Ergebnisse zu bringen. Wenn wir hier nun die dabei gesponnenen Fäden zusammenknüpfen, so kann daraus, dem bescheidenen Ziel entsprechend, keineswegs ein festes Netz werden, mit dem sich Begriffsgenese und zugehörige unterrichtliche Bemühungen sicher einfangen lassen.

(2) Deutlich geworden ist in allen Überlegungen und Versuchen die außerordentliche Komplexität des Verhältnis- und Bruchbegriffs, dabei aber auch, daß es Stufen gibt, auf denen man schrittweise emporsteigen kann.

Mathematisch sind diese Stufen gekennzeichnet durch Klassenbildungsprozesse (je nach Zugang sind es Klassen von Zahlenpaaren, von Größenpaaren oder von Bruchoperatoren) und die zunehmende Strukturierung der so geschaffenen Mengen.

Psychologisch stellt sich die Stufung weniger deutlich dar. In 2.1 haben wir verschiedene mögliche Beschreibungen angegeben. Es wäre falsch zu fragen, ob das Modell von GAGNÉ, von BRUNER, von PIAGET oder noch ein anderes "das richtige" ist. Vielmehr werden von jedem verschiedene Aspekte erfaßt und aufgedeckt.
In allen Ansätzen wird erkennbar, daß Begriffsbildung auf zahlreichen Niveaus stattfindet, auf jedem von ihnen bieten sich unterschiedliche Möglichkeiten für die Begriffsverwendung. (Für viele Zwecke reicht eine neutra-

le Beschreibung der Stufen der Begriffsbildung aus, wie sie etwa VOLLRATH angibt. Er unterscheidet: Stufe I: Inhaltliche, nichtformale Kenntnis; Stufe II: Formale Kenntnis; Stufe III: Integrierte Kenntnis; Stufe IV: Kritische Kenntnis. Vgl. VOLLRATH, 1974, S. 51ff.)

Didaktisch endlich finden wir einen stufenförmigen Aufbau des Unterrichts sehr betont schon in der traditionellen Rechendidaktik (vgl. OEHL, 1965, MÜLLER/THYEN, 1967). Fortgeführt und erweitert werden diese Überlegungen in neueren didaktischen Arbeiten, in denen die entsprechenden Aspekte so zentral sind, daß sie zu didaktischen Prinzipien erhoben wörden sind: Präfigurationsprinzip, Spiralprinzip, Prinzip der Fortsetzbarkeit, genetisches Prinzip. (Vgl. WITTMANN, 1974.)

Viele (dieser?) Stufen können wir in unseren Ergebnissen wiederentdecken, in den Gesprächen mit einzelnen Kindern ebenso wie in den Unterschieden zwischen den in den Tests erfaßten Altersgruppen.

(3) Ob etwa die PIAGET-Stadien auch Denk- oder Lernstufen sein können oder müssen (vgl. dazu hierzu VAN HIELE, 1964, 1976), ist nicht der zentrale Punkt. Für unterrichtliche Überlegungen ist wichtiger, daß diese Stufen (welcher Art sie auch immer sein mögen) Schritt für Schritt erstiegen werden müssen. Es geht nicht darum, dem Kind diese Schritte zu ersparen, wohl aber sie so weit wie möglich zu erleichtern. Wie jeder Begriff hat auch der Bruchbegriff eine Entstehungsgeschichte. Er taucht nicht plötzlich auf, sondern entwickelt sich aus zarten Anfängen, entfaltet sich mehr und mehr und wird zu einem immer leistungsfähigeren Instrument des Denkens. Natürlich läuft dieser Prozeß nicht von selbst ab, sondern bedarf der behutsamen und systematischen Förderung und Hilfe. Die Kinder müssen Erfahrungen in Bruch- und Verhältnissituationen sammeln, über sie nachdenken, Fragen stellen, Vermutungen äußern und ihnen nachgehen ("argumentieren").

Dabei wird ihr Denken durchaus nicht immer den Wegen folgen, auf denen Mathematiker möglichst schnell ans Ziel zu kommen versuchen. Gerade hier liegt die Chance zu freier, entdeckender, kreativer Arbeit.

Sicher wird das Kind die erforderlichen Schritte nicht immer zielstrebig und ohne Zögern gehen. Unsere Interviews haben das eindrucksvoll gezeigt. Es wird oft nur Teilschritte machen, hier und da Schritte in eine "falsche" Richtung, einen Schritt in dieser Situation tun, in einer anderen - mathematisch gleichwertigen - vielleicht nicht. Es scheint, daß allzu starke Orientierung an mathematischen oder psychologischen Theorien leicht zu pädagogischen Kurzschlüssen führen kann. Kurzgeschlossen werden dabei oft gerade die Wege, auf denen der Lernende hilfreiche Erfahrungen machen könnte. Diese aber sollten im Mittelpunkt des Unterrichts stehen.

(4) Bei der Begriffsentfaltung sind Hilfen des Unterrichts nach unseren Ergebnissen und denen anderer Arbeiten möglich und wohl auch unverzichtbar. Sie werden umso notwendiger, je mehr Mühe die Fortschritte machen. Stellvertretend für viele andere sei hier auf die Ausführungen von AEBLI hingewiesen, der schon recht früh (AEBLI, 1963) starke Bedenken gegen die Vernachlässigung von Umwelt-, speziell Unterrichtseinflüssen (speziell in der PIAGETschen Psychologie) angemeldet hat. In einer späteren Arbeit (AEBLI, 1971, S. 175) stellt er mit Nachdruck fest:

> "Es gibt im menschlichen Verhalten keine Schemata, welche aufgrund bloßer Reifung emergieren."

Im gleichen Sinne schreibt FISCHBEIN (1973, S. 225/226):

> "Our hypothesis, therefore, is that this process of refining and correcting the intuitive basis should not be allowed to go on in a haphazard manner ... but should be an integral part of the teaching process ... spread out over a long time whilst intelligence is developing."

(5) Von diesem Ansatz her ergeben sich eine Reihe von Folgerungen für die Förderung der Entwicklung des Bruchbegriffs und Verhältnisdenkens im Unterricht.

- Notwendige Voraussetzung ist in jedem Fall Vertrautheit mit Größen, nur so kann ein stabiler Unterbau für weitere Begriffsbildung geschaffen werden. Sowohl in der mathematischen und psychologischen Analyse wie auch in didaktischen Konzepten - gleich ob neu oder schon älter - wird die zentrale Bedeutung von Größen sichtbar.

- Die weiterführenden Konstruktionen müssen so erfolgen, daß Motivation und Prozesse erkennbar sind. Dabei helfen mengentheoretisch-algebraische Ansätze kaum weiter. Vielmehr müssen die Zugänge bei überschaubaren Situationen ansetzen, mit Handlungen und Überlegungen des Kindes korrespondieren, diese in natürlicher Weise fortsetzen und so für das Verständnis von Phänomenen und Zusammenhängen hilfreich sein.

- Es ist weder möglich noch erstrebenswert, den gesamten Lernprozeß in eine relativ kurze Zeitspanne zu pressen. Er beginnt spätestens in der Grundschule und muß dann Schritt für Schritt "spiralig" weitergeführt werden.

- Die Entwicklung verläuft nicht linear und in "Einbahnstraßen". Nur wenn in allen Phasen die verschiedensten Aspekte und ihre vielfältigen Verzahnungen herausgearbeitet werden, kann die Schaffung eines Begriffsgefüges glücken.

(6) Analysiert man insoesondere mögliche Vorerfahrungen zum Bruchbegriff in der Grundschule[1], so entdeckt man schon

---

1) Einige Aktivitäten sind an anderer Stelle zusammengestellt. (FLOER, 1974b)

dort ein weites Feld. In neuere Lehrpläne und Schulbücher sind entsprechende Vorschläge bereits eingegangen. (Man vergleiche - stellvertretend für viele andere - das Lehrbuch von WINTER/ZIEGLER und die Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen, 1973.) Natürlich läßt sich das, was in der Primarstufe geschieht, nicht von der geistigen Gesamtentwicklung des Kindes lösen. Es werden ja Begriffe vorgeformt und spätere Weiterführungen angebahnt - die ersten Windungen einer Curriculumspirale durchlaufen. Diese Phase ist sicher besonders bedeutsam für Überlegungen, deren Schwerpunkt auf der Begriffsgenese, nicht auf der Analyse des Erwerbs von Fertigkeiten liegt. Daß fundamentale Ideen im Vorfeld des Bruchbegriffs nicht durch formale Zugänge, insbesondere nicht durch eine Vorverlegung der Bruchrechnung vermittelt werden können, ist Ausgangspunkt und Leitgedanke dieser Arbeit gewesen. Pädagogisch zentral ist die Ausbildung kognitiver Schemata, mit denen Teilungs- und Verhältnissituationen bewältigt werden können. Voraussetzung dafür ist, das möglichst zahlreiche Sachsituationen (reale Streck- und Stauchvorgänge, Mischungsprobleme, Wahrscheinlichkeitsfragen, Maßstäbe u.v.a.m.) berücksichtigt werden, vor allem aber die verschiedenen Aspekte und Verwendungsmöglichkeiten von Bruchzahlen: zur Kennzeichnung von Größen eines Bereichs mit ausgezeichneter Einheit, zur Beschreibung von Teilungsprozessen (als Handlungsanweisungen und Zuordnungsvorschriften), zur Angabe von Größenverhältnissen, zur Benennung von Punkten auf dem Zahlenstrahl. Erst mit zunehmender Vertrautheit kommt außerdem die Verwendung von Brüchen als Rechenobjekte, etwa als Lösungen von Gleichungen, hinzu.

(7) Zum Abschluß notieren wir einige Stichworte zu den genannten Aspekten.

Die Deutung von Brüchen als Größen ist charakteristisch für die traditionelle Rechendidaktik. Die "Bruchher-

stellungsakte" schimmern zwar durch, doch liegt der Akzent nicht auf den Teilungsprozessen, sondern auf deren Ergebnissen. So unentbehrlich eine solche konkrete Bruchrechnung in jedem Vorschlag auch ist, so kann sie doch nur eine Linie der Entwicklung des Bruchbegriffs erfassen. Zwar stellt OEHL (1965, S. 147) fest:

> "Die vielen möglichen individuellen Brüche $\frac{1}{2}$ m, $\frac{1}{2}$ l, ... verdichten sich in dem einen unbenannten Bruch $\frac{1}{2}$",

doch gerade diese Verdichtung ist problematisch. Es ist kaum möglich zu beschreiben, wie ein solcher Prozeß, der den Übergang von Größenangaben zu Bruchzahlen ermöglicht, ablaufen könnte, wenn man in einer reinen Zustandssicht verhaftet bleibt.

Einige der Beschränkungen des traditionellen Ansatzes lassen sich erst überwinden, wenn man sich von den Größen löst und die Herstellungsakte selbst in den Mittelpunkt des Interesses rückt. Auf diesem Wege gelangt man zur Operatordeutung der Bruchzahlen und dem bekannten weiteren Aufbau. Allerdings stellt sich keineswegs die Alternative "entweder Zustände oder Operatoren". Der Schritt zu den Operatoren führt zwar über Größen hinaus, baut aber auf ihnen auf und verliert sie dabei keineswegs aus dem Auge. Relationen für Operatoren werden mit Hilfe von Größen definiert, und konkrete Bruchrechnung fügt sich mathematisch wie psychologisch in die Gesamtbemühungen um den Bruchbegriff ein. Psychologisch, weil das Denken des Kindes nun einmal konkrete Stützen braucht, mathematisch, weil die Vertrautheit mit Größen die Basis für den Umgang mit Abbildungen von Größenbereichen bildet. Diese sind extensional nichts anderes als Klassen von Größenpaaren. In dem Maße, wie die Äquivalenzrelation "gehört zu demselben Operator" (in $G \times G$) in den Vordergrund rückt, wird die allzu restringierte Zustandssicht erweitert und in ein lei-

stungsfähigeres Denksystem integriert.

"Operatorfreie" Möglichkeiten für den Umgang mit Größenverhältnissen haben wir in 1.3 skizziert und in dem in Kap. 4 beschriebenen Unterrichtsversuch aufgegriffen. Es eröffnen sich dabei Wege, auf denen Verhältnisvergleiche - grob gesprochen - näher und länger bei den Größen bleiben können. Erweitern und Kürzen wird auf Auf- und Abbauprozesse zurückgeführt. Auch hier kann man Beobachtungen und Ergebnisse aus der Verhältnis- in die Operatorsprache übersetzen. Natürlich ist dieses Umdenken eine eigene geistige Leistung und erfordert entsprechende Bemühungen im Unterricht.

Einen sehr einfachen Ausweg aus vielen der aufgezeigten Schwierigkeiten scheint der Vorschlag FREUDENTHALs zu bieten, Bruchzahlen schlicht als Punkte oder Strecken am Zahlenstrahl zu notieren.

> "Es gibt bei diesem Verfahren keine Einführung von neuen Zahlen, keine prinzipielle Erweiterung des Zahlenbereichs, sondern ein immer wachsendes 'erforschtes Gebiet'." (FREUDENTHAL, 1973, Bd. 1, S. 195)

Dazu sind ein paar Stichworte notwendig. Braucht man Bruchzahlen als Rechenobjekte, so ist die Zahlenstrahldarstellung sicherlich sehr vorteilhaft. Dieser Aspekt aber steht nicht am Anfang der Bruchbegriffsentwicklung. Vergleicht man Anteile, Verhältnisse, Wahrscheinlichkeiten, so ist von Punkten am Zahlenstrahl zunächst noch keine Rede. Wohl aber kann man die auftretenden Fragen in "Zahlenstrahlsprache" übersetzen. Bei Urnenvergleichen etwa gelingt dies dadurch, daß man für jede Kugel einen gleich langen Abschnitt am Zahlenstrahl abträgt. In Operatorsprache bedeutet dieser Übergang, daß die Operatoren von "ihren" Größenbereichen losgelöst werden und auf dem Zahlenstrahl arbeiten. Von den vielen Strekkenpaaren, die sie dort erzeugen, wählt man jeweils den

Repräsentanten mit einer festen Eingabe, der "Einheitsstrecke". Auf diese Weise kann man nun Regeln für Verhältnisse und Operatoren als Zahlenstrahlregeln formulieren. Der Versuch, die Überlegungen von vornherein an den Zahlenstrahl zu binden, birgt jedoch die Gefahr einer Verengung des Bruchbegriffs.

(8) Für Unterrichtsentwürfe ist nicht die zentrale Frage, welcher Zugang nun der "richtige" oder der beste ist. Zwar kann es sein, daß man auf den einzelnen Wegen unterschiedlich weit und bequem in das Reich der Bruchzahlen gelangt, doch wichtiger ist, wie sich die verschiedenen Aspekte verzahnen und ineinander übersetzen lassen, wie sich ein Aspekt in dem jeweils anderen sichtbar machen und durch ihn anreichern läßt. Der Mensch kommt nicht hier mit Bruchoperatoren, dort mit Verhältnissen in Berührung - beides säuberlich getrennt. Es sind lediglich verschiedene Zugänge und Denkmuster, die er sich schafft, um mit Problemen fertig zu werden. Mal tritt der eine, mal der andere Aspekt in den Vordergrund, oft kommen im gleichen Problem beide ins Spiel.

Möglicherweise nimmt der Operatoraspekt dabei eine Sonderrolle ein, weil er die kognitiven Schemata des Teilens und Vervielfachens, die für die Bildung des Bruch- und Verhältnisbegriffs konstitutiv sind, am natürlichsten aufgreift und präzisiert und daher als Drehscheibe der Bemühungen brauchbar ist. (Daß diese Vermutung nicht unproblematisch ist, geht allerdings aus den in Kap. 4 beschriebenen Versuchen hervor.) Doch auch wenn man das Operatormodell in dem genannten Sinne als "moderne" Bruchrechnung ansieht, wäre es ein verhängnisvolles Mißverständnis, wenn sich der Unterricht auf formale Regeln für den Umgang mit Operatoren beschränken würde.

(9) Offene Fragen

Vieles von dem, was in dieser Arbeit geschildert worden ist, erinnert an den bekannten Versuch, in trübem Wasser mit einem alten Lappen sein Geschirr sauber zu spülen.
Daß dies nicht komplikationslos gelingen kann, ist kaum verwunderlich, und so haben wir auch an zahlreichen Stellen offene Probleme bereits notiert. Im einzelnen geht es um die Fragen:

- Wie lernen Kinder?
- Wie erhält man Einblicke in diesen Lernprozeß?
- Wie kann man ihnen dabei helfen?
- Wie können Ergebnisse der Lern- und Entwicklungspsychologie von der Fachdidaktik genutzt werden?
- Wie setzt man die gewonnenen Einsichten in fruchtbaren Unterricht um?
- Welche Wege führen am sichersten zum Ziel?

Der in Schlußworten übliche Hinweis, daß nun umfangreichere und systematischere Untersuchungen notwendig sind, um die aufgedeckten Ansätze weiter zu verfolgen, reicht hier allerdings nicht aus. Zur Beantwortung der genannten Fragen ist durchaus mehr vonnöten: daß es nämlich gelingt, Fragen des Lernens und des Unterrichts neu und umfassender zu durchdenken - nicht primär von Inhalten her, sondern von Bedürfnissen des lernenden Kindes ausgehend.

L I T E R A T U R

AEBLI, H.
1963 Psychologische Didaktik, Stuttgart 1963

AEBLI, H.
1971 "Die geistige Entwicklung als Funktion von Anlage, Reifung, Umwelt- und Erziehungsbedingungen", in: ROTH, H. (Hg.), 1971: 151-191

ANDERSON, R.C./AUSUBEL, D.P. (Hg.)
1965 Readings in the psychology of cognition, New York 1965

AVITAL, S./SHETTLEWOOD, S.
1968 "Objectives for mathematics learning", Ontario Institute for Studies in Education, Bulletin No. 3, 1968

BEARDSLEE, E.C./GAU, G.E./HEIMER, R.T.
1973 "Teaching for generalization: An array approach to equivalent fractions", Arith. Teacher 20, 1973: 591-599

BECKMANN, F.
1967 "Neuere Gesichtspunkte zum 5. Buch Euklids", Archive for the History of Exact Sciences, Vol.4 (1/2), 1967

BECKMANN, F.
1974 "Eudoxische Proportionenlehre in moderner Sicht", Mathematikunterricht 20 Heft 6, 1974: 65-88

BEHNKE, H./BACHMANN, F./FLADT, K./SÜSS, W. (Hg.)
1966 Grundzüge der Mathematik, Bd. 1, Grundlagen der Mathematik, Arithmetik und Algebra, Göttingen 1966

BEHREND, F.A.
1956 "A contribution to the theory of magnitudes and the foundations of analysis", Mathematische Zeitschrift 63, 1956: 345-362

BETH, E.W./PIAGET, J.
1961 Epistémologie mathématique et psychologie, Paris 1961

BLOOM, B.S. ua.
1972 Taxonomie von Lernzielen im kognitiven Bereich, Weinheim - Basel 1972

BLOOM, B.S./HASTINGS, J.T./MADAUS, G.F.
1971 Handbook on formative and summative evaluation of student learning, New York 1971

BOURBAKI, N.
1971 Elemente der Mathematikgeschichte, Göttingen 1971

BRAUNFELD, P.
1969 "Ein neuer Zugang zur Bruchrechnung vom Standpunkt der Operatoren", Beiträge zum Mathematikunterricht 1968, Hannover 1969: 209-217

BRAUNFELD, P. u.a.
1969 a Stretchers and shrinkers, Book 1-4, Illinois 1969

BRAUNFELD, P./DILLEY, C.A./RUCKER, W.E.
1967 "A new UISCM approach to fractions for the Junior High School", Math. Teacher 60, 1967: 215-221

BREIDENBACH, W.
1969 Methodik des Mathematikunterrichts in Grund- und Hauptschulen, Hannover 1969

BRUNER, J.S.
1964 "The course of cognitive growth", Amer. Psych. 19, 1964: 1-15

BRUNER, J.S.
1966 Toward a theory of instruction, Cambridge - Mass. 1966

BRUNER, J.S.
1970 Der Prozeß der Erziehung, Düsseldorf 1970

BRUNER, J.S.
1971 "Über kognitive Entwicklung", in: BRUNER/ OLVER/GREENFIELD 1971:21-96

BRUNER, J.S/GOODNOW, J.J./ AUSTIN, G.A.
1956 A study of thinking, New York 1956

BRUNER, J.S./KENNEY, H.J.
1971 "Über Beziehungsbegriffe", in: BRUNER/OLVER/GREENFIELD 1971: 207-222

BRUNER, J.S./OLVER, R.R./GREENFIELD, P.M.
1971 Studien zur kognitiven Entwicklung, Stuttgart 1971

CAMPBELL, D.T./STANLEY, J.C.
1970 "Experimental and quasi-experimental designs for research on teaching" (deutsche Bearbeitung von SCHWARZ, E., in: INGENKAMP (Hg.) 1970: 445-631)

CLARK, C.D.
1971 "Teaching concepts in the classroom: a set of teaching prescriptions derived from experimental research", Journ. Educ. Psych. Mon. 62, 1971: 253-278

CLAUSS, G./EBNER, H.
1967 Grundlagen der Statistik für Psychologen, Pädagogen und Soziologen, Berlin 1967

DAVIES, C.M.
1965 "Development of the probability concept in children", Child Devel. 36, 1965: 779-788

DE CECCO, J.P.
1968 The psychology of learning and instruction: Educational psychology, New Yersey 1968

DEDEKIND, R.
1905 Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1905[3] (1872[1])

DIENES, Z.P.
1968 Bruchrechnen, Freiburg 1968

FISCHBEIN, E.
1969 "Enseignement mathématique et développement intellectuel", Educ. Stud. Math. 2, 1969: 290-306

FISCHBEIN, E.
1973 "Intuition, structure and heuristic methods in the teaching of mathematics", in: HOWSON, A.G. (Hg.) 1973: 222-232

FISCHBEIN, E./PAMPU, I./MINZAT, I.
1969 "Initiation aux probabilités à l'école élémentaire", Educ. Stud. Math. 2, 1969:16-31

FISCHBEIN, E./PAMPU, I./MINZAT, I.
1970 "Comparison of ratios and the chance concept in children", Child Devel. 41, 1970: 377-389

FISCHBEIN, E./PAMPU, I./MINZAT, I.
1970 a "Effects of age and instruction on combinatory ability in children", Brit. J. Educ. Psych. 40, 1970: 261-270

FLAVELL, J.H
1963 The developmental psychology of Jean Piaget, New York 1963

FLOER, J.
1974 a "Zur Entwicklung des Bruchbegriffs bei 5-12jährigen Kindern - Eine Untersuchung", Die Schulwarte 27, Heft 10/11, 1974: 33-46

FLOER, J.
1974 b "Erfahrungen zum Bruchbegriff in der Grundschule", in: SCHWARZ, E. (Hg.) 1974: 410-431

FLOER, J.
1976 "Mathematikunterricht und Begriffsbildung, Eine Untersuchung am Beispiel des Verhältnisbegriffs", in: Beiträge zur Mathematikdidaktik, Festschrift für Wilhelm Oehl, Hannover 1976: 21-45

FREUDENTHAL, H.
1963 "Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?", Mathematikunterricht 9, Heft 4, 1963: 5-29

FREUDENTHAL, H.
1973 Mathematik als pädagogische Aufgabe, 2 Bände, Stuttgart 1973

FREUDENTHAL, H.
1974 "Lernzielfindung im Mathematikunterricht", Zeitschr. f. Päd. 20, 1974: 720-738

FREUND, H.
1965/66 "Die Einführung der ganzen Zahlen und der Brüche im Sinne der modernen Algebra", Math. Nat. Unterricht 18, 1965/66: 401-405

FURTH, H.G.
1973 Piaget für Lehrer, Düsseldorf 1973

GAGNÉ, R.M.
1965 "The acquisition of knowledge", in: ANDERSON/AUSUBEL (Hg.) 1965

GAGNÉ, R.M.
1969 Die Bedingungen des menschlichen Lernens, Hannover 1969

GAGNÉ, R.M./MAYOR, R./GARSTENS, H.L./PARADISE, N.E.
1962 "Factors in aquiring knowledge of a mathematical task", Psych. Monographs 67, 1962 .(7, No. 526)

GERICKE, H.
1970 Geschichte des Zahlbegriffs, Mannheim 1970

GINSBURG, H./OPPER , S.
1975 Piagets Theorie der geistigen Entwicklung, Stuttgart 1975

GINSBURG, H./RAPPOPORT, A.
1967 "Children's estimates of proportions", Child Devel. 38, 1967: 205-212

GOLDBERG, S.
1966 "Probability judgements by preschool children: Task conditions and performance", Child Devel. 37, 1966: 157-167

GRAUMANN, C.F./HECKHAUSEN, H. (Hg.)
1973 Pädagogische Psychologie I (Funkkolleg Grundlagentexte), Frankfurt 1973

GRIESEL, H.
1959 "Eine verbandstheoretische Analyse der Bruchrechnung", Math.-Phys. Semesterberichte VI, Heft 3/4, 1959:195-216

GRIESEL, H.
1968 "Eine Analyse und Neubegründung der Bruchrechnung", Math.-Phys. Semesterberichte XV, Heft 1, 1968:48-68

GRIESEL, H.
1969 "Algebra und Analysis der Größensysteme", Math.-Phys. Semesterberichte XVI, 1969: 56-93 (Teil 1), 184-234 (Teil 2)

GRIESEL, H.
1970 "Der wissenschaftliche Hintergrund der Bruchrechnung", Mathematikunterricht XVI, Heft 2, 1970: 5-29

GRIESEL, H.
1973 Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten, Bd. 2, Hannover 1973

GRIESEL, H.
1973 a "Der mathematische Hintergrund der natürlichen Zugänge zu den negativen Zahlen", Mathematikunterricht 19, Heft 1, 1973: 54-77

GRIESEL, H.
1975 "Zur Einführung", Mathematikunterricht 21, Heft 1, 1975: 3-5

HARRIS, C.W. (Hg.)
1963 Problems in measuring change, Madison, Wisc. 1963

HASSE, H./SCHOLZ, H.
1928 Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik, Leipzig 1928 (Neudruck 1940)

HEITELE, D.
1975 "An epistemological view of fundamental stochastic ideas", Educ. Stud. Math. 6, 1975: 187-205

HEITELE, D.
1976 Didaktische Ansätze zum Stochastikunterricht in Grundschule und Förderstufe, Diss. Päd. Hochschule Ruhr, Dortmund 1976

HIELE, P.M. VAN
1964 "Piagets Beitrag zu unserer Einsicht in die kindliche Zahlbegriffsbildung", in: PIAGET/RESAG/FRICKE/VAN HIELE/ ODENBACH,1964: 105-131

HIELE, P.M. VAN
1976 "Wie kann man im Mathematikunterricht den Denkstufen Rechnung tragen?", Educ. Stud. Math. 7, 1976: 157-159

HOEMANN, H.W./ROSS, B.M
1971 "Children's understanding of probability concepts", Child Devel. 42, 1971: 221-236

HOWSON, A. G. (Hg.)
1973 Developments in mathematical education, Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education, Cambridge 1973

INGENKAMP, K. (Hg.)
1970 Handbuch der Unterrichtsforschung, Teil 1, Weinheim - Berlin - Basel 1970

INHELDER, B./PIAGET, J.
1958 The growth of logical thinking from childhood to adolescence, London 1958

INHELDER, B./SINCLAIR, H./BOVET, M.
1974 Apprentissage et structures de la connaissance, Paris 1974

KENDLER, H.H.
1964 "The concept of the concept", in: MELTON, A.W. (Hg.) 1964: 211-236

KENDLER, T.S.
1961 "Concept formation", Annual Rev. Psych. 12, 1961: 447-472

KIRSCH, A.
1970 Elementare Zahlen- und Größenbereiche, Göttingen 1970

KIRSCH, A.
1970 a "Die Einführung der natürlichen Zahlen als Operatoren", Math.-Phys. Semesterberichte XVII, Heft 1, 1970: 57-67

KIRSCH, A.
1973 "Die Einführung der negativen Zahlen mittels additiver Operatoren", Mathematikunterricht 19, Heft 1, 1973: 5-39

KIRSCH, A.
1975 "Gehört die Multiplikation vor die Addition?", Mathematikunterricht 21, Heft 1, 1975: 35-47

KLAUSMEIER, H.J./GHATALA, E.S./FRAYER, D.A.
1974 Conceptual learning and development. A cognitive view, New York/London 1974

KLAUSMEIER, H.J./HARRIS, C.W. (Hg.)
1966 Analyses of concept learning, New York 1966

KRANTZ D.H./LUCE, P.D./SUPPES, P./TVERSKY, A.
1971 Foundations of measurement, Vol.I, New York - London 1971

KREISEL, G.
1974 "Die formalistisch - positivistische Doktrin der mathematischen Präzision im Lichte der Erfahrung", in: OTTE, M. (Hg.) 1974: 65-123

KROPP, G.
1969 Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Mannheim 1969

KRUCKENBERG, A.
1957 Die Welt der Zahl im Unterricht, Hannover 1957[6] (1935[1])

KRULL, W.
1960 "Über die Endomorphismen von total geordneten Archimedischen Abelschen Gruppen", Math. Zeitschr. 74, 1960: 81-90

LANDAU, E.
1930 Grundlagen der Analysis, Leipzig 1930 (unveränderter Nachdruck: Darmstadt 1963)

LEAKE, L.Jr.
1965 "The status of three concepts of probability in children of seventh, eigth and ninth grades", J. Exp. Educ. 34, 1965: 78-84

LEFFIN, W.W.
1971 A study of three concepts of probability possessed by children in the fourth, fifth, sixth and seventh grades, Wisconsin Research and Development Center for Cognitive Learning, Technical Report No. 170, Madison, Wisc. 1971

LIENERT, G.A.
1969 Testaufbau und Testanalyse, Weinheim - Berlin - Basel 1969

LIND, D.
1975 "Zur Operatorenmethode der Bruchrechnung und ihrer Langzeitwirkung", Die Schulwarte 26, Heft 8/9, 1973: 88-94

LIND, D.
1975 "Eine Vergleichsuntersuchung zur Bruchrechnung", Beiträge zum Mathematikunterricht 1975, Hannover 1975: 96-100

LONGEOT,F./BELLEUDY, R. et S./CHANEAC, S.
1971 "Effets de l'apprentissage sur la notion de proportionalité", Enfance, 1971: 31-47

LORENZEN, P.
1960 Entstehung der exakten Wissenschaften, Heidelberg 1960

LOVELL, K.
1961 The growth of basic mathematical and scientific concepts in children, London 1961

LOVELL, K.
1966 "Concepts in mathematics", in:KLAUSMEIER/HARRIS (Hg.),1966

LOVELL, K.
1971 "Proportionality and probability", in: ROSSKOPF/STEFFE/TABACK (Hg.),1971: 136-148

LOVELL, K./BUTTERWORTH, I.B.
1966 "Abilities underlying the understanding of proportionality", Math. Teaching 30, 1966: 5-9

LUGOWSKI, H.
1962 "Eine axiomatische Grundlegung des anschaulich-genetischen Aufbaus der Arithmetik in der Schulmathematik", Wiss. Zeitschr. d. Päd. Hochschule Potsdam, 1962: 297-330

LUGOWSKI, H./WEINERT, H.J.
1968 Grundzüge der Algebra, 3 Bd., Leipzig 1968[3]

LUNZER, E.A./PUMFREY, P.D.
1966 "Understanding proportionality", Math. Teaching 34, 1966: 7-12

MACKUTH, T./JAUMANN, H.
1975 "Entwicklung eines diagnostischen Tests zur Bruchrechnung", Beiträge zum Mathematikunterricht 1975, Hannover 1975: 101-109

MALMENDIER, N.
1975 "Eine Axiomatik zum 7. Buch der Elemente von Euklid", Math.-Phys. Semesterberichte XXII, Heft 2, 1975:240-254

MELTON, A.W. (Hg.)
1964 Categories of human learning, New York - London 1964

MENNINGER, K.
1958 Zahlwort und Ziffer, Göttingen 1958[2]

MESSICK, S.J./SOLLEY, C.M.
1957 "Probability learning in children: Some exploratory studies", J. Genetic Psych. 90, 1957: 23-32

METZLER, W.
1970 "Eine Einführung der positiven rationalen und positiven reellen Zahlen auf Grund von Meßvorgängen", Math.-Phys. Semesterberichte XVII, Heft 1, 1970: 68-87

MITSCHKA, A.
1971 Das Rechnen mit Verhältnissen, Ratingen 1971

MONTADA, L.
1970 Die Lernpsychologie Jean Piagets, Stuttgart 1970

MÜLLER, W./THYEN, H.
1967 Rechentüchtigkeit und mathematische Bildung (Max Traeger Stiftung Forschungsberichte 5), Darmstadt 1967

MUSSEN, P.H. (Hg.)
1970 Carmichael's manual of child psychology 1, New York 1970

NEIMARK, E.D./SANTA, J.L.
1975 "Thinking and concept attainment", in: ROSENZWEIG/PORTER (Hg.) 1975

NELSON, K.J./ZELNIKER, T./JEFFREY, W.E.
1969 "The child's concept of proportionality: A reexamination", J. Exp. Child Psych. 8, 1969: 256-262

NOVILLIS, C.F.
1976 "An analysis of the fraction concept into a hierarchy of selected subconcepts and the testing of the hierarchical dependencies", Journ. Res. Math. Educ. 7 (No. 3), 1976: 131-144

OBERSCHELP, A.
1968 Aufbau des Zahlensystems, Göttingen 1968

OEHL, W.
1965 Der Rechenunterricht in der Hauptschule, Hannover 1965

OERTER, R.
1971 Psychologie des Denkens, Donauwörth 1971[2]

OLVER, R.R./HORNSBY, J.R.
1971 "Über Äquivalenz", in: BRUNER/OLVER/GREENFIELD, 1971:97-116

OTTE, M. (Hg.)
1974 Mathematiker über die Mathematik, Berlin - Heidelberg - New York 1974

PIAGET, J.
1947 Psychologie der Intelligenz, Zürich 1947

PIAGET, J.
1968 "Le point de vue de Piaget", Int. J. Psych. 3, 1968:281-299

PIAGET, J.
1970 "Piaget's theory", in: MUSSEN (Hg.) 1970: 703-732

PIAGET, J.
1970 a The child's conception of movement and speed, London 1970 (Franz. Originalausgabe 1946)

PIAGET, J.
1972 Theorien und Methoden der modernen Erziehung, Wien - München - Zürich 1972

PIAGET, J.
1973 "Wie Kinder mathematische Begriffe lernen", in: GRAUMANN, C.F. /HECKHAUSEN, H. (Hg.) 1973: 53-90 (Original: Scientific American 189, 1953: 74-79)

PIAGET. K-
1974 Abriß der genetischen Epistemologie, Olten 1974

PIAGET, J.
1975 Die Entwicklung des Erkennens I: Das mathematische Denken, Stuttgart 1975 (Originalausgabe Paris 1950)

PIAGET, J./GRIZE, J.-B./SZEMINSKA, A./VINH BANG
1968 Epistémologie et psychologie de la fonction, Paris 1968

PIAGET, J./INHELDER, B.
1951 La genése de l'idée du hasard chez l'enfant, Paris 1951

PIAGET, J./INHELDER, B.
1969 The psychology of the child, New York 1969

PIAGET, J./INHELDER, B.
1971 Die Entwicklung des räumlichen Denkens, Stuttgart 1971
(französiche Originalausgabe 1948)

PIAGET, J./INHELDER, B./SZEMINSKA, A.
1975 Die natürliche Geometrie des Kindes, Stuttgart 1975
(Originalausgabe Paris 1948)

PIAGET, J./RESAG, K./FRICKE, A./VAN HIELE, P.M./ODENBACH, K.
1964 Rechenunterricht und Zahlbegriff, Braunschweig 1964

PIAGET J./SZEMINSKA, A.
1965 Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde, Stuttgart 1965

PICKERT, G./GÖRKE, L.
1961 "Zur Einbettung von Halbgruppen in Gruppen", Math. Zeitschr. 77, 1961: 241-248

PICKERT, G.
1968 "Die Bruchrechnung als Operieren mit Abbildungen", Math.-Phys. Semesterberichte XV, Heft 1, 1968: 32-47

PICKERT, G./GÖRKE, L.
1966 "Aufbau des Systems der reellen Zahlen", in: BEHNKE u.a. 1966: 92-157

PIRE, G.
1958 "Notion du hasard et développement intellectuel", Enfance, 1958: 131-143

RAUH, H.
1972 Entwicklungspsychologische Analyse kognitiver Prozesse, Weinheim - Basel 1972

RICHTLINIEN GRUNDSCHULE NW
1973 Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-estfalen, Ratingen 1973

RICHTLINIEN ORIENTIERUNGSSTUFE NW
1973 Richtlinien und Lehrpläne für die Orientierungsstufe (Klassen 5 und 6) in Nordrhein-Westfalen, Düsseldorf 1973

ROSENZWEIG, M.R./PORTER, L.W. (Hg.)
1975 Annual review of psychology, Vol. 26, Palo Alto 1975

ROSSKOPF, M.F./STEFFE, L.P./TABACK, S.
1971 Piagetian cognitive - development research and mathematical education, Reston, Virginia 1971

ROTH, H. (Hg.)
1971 Begabung und Lernen, Deutscher Bildungsrat, Gutachten und Studien der Bildungskommission 4, Stuttgart 1971[1]

SCHMITZ, G./BÄR, J./WINTER, H.
1969 Aspekte moderner Mathematik in der Hauptschule, Ratingen 1969

SCHWARZ, E. (Hg.)
1974 Richtlinien und Unterrichtspraxis (Arbeitskreis Grundschule e.V.), Frankfurt/M. 1974

SEEBACH, K.
1971 "Zahlbereichserweiterungen mit Hilfe von Operatoren", Der Math. u. Naturwiss. Unt. 24, 1971: 142-145

SEYFFERTH, S.
1975 "Bruchrechnung und natürliche Sprache", Mathematikunterricht 21, Heft 1, 1975: 35-47

SIGEL. I.E./HOOPER, F.H. (Hg.)
1968 Logical thinking in children, Research based on Piaget's theory, New York 1968

SINCLAIR, H.
1971 "Piaget's theory of development: the main stages", in: ROSSKOPF/STEFFE/TABACK (Hg.), 1971: 1-11

SMITH, D.E.
1958 History of mathematics, Vol. 1, New York 1958

STEFFE, L.P./PARR, R.B.
1968 The development of the concepts of ratio and fraction in the fourth, fifth and sixth years of the elementary school, Wisconsin Research and Development Center for Cognitive Learning, Technical Report No. 49, Madison, Wisc. 1968

STEINER, G.
1973 Mathematik als Denkerziehung, Stuttgart 1973

SUPPES, P.
1966 "Mathematical concept formation in children", American Psychologist 21, 1966: 139-150

THAER, C. (Hg.)
1962 EUKLID, Die Elemente, Buch I-XIII, Darmstadt 1962

THOM, R.
1971 " 'Modern' mathematics: an educational and philosophic error?" Am. Scientist 59 No. 6, 1971: 695-699 (deutsche Übersetzung in: OTTE, M. (Hg.) 1974: 371-390

THOM, R.
1973 "Modern mathematics: does it exist?" in: HOWSON, A.G. (Hg.), 1973: 194-209

VOLLRATH, H.J.
1974 Didaktik der Algebra, Stuttgart 1974

VOLLRATH, H.J.
1976 "Ähnlichkeit von Rechtecken", in: Beiträge zur Mathematikdidaktik, Festschrift für Wilhelm Oehl, Hannover 1976: 111-129

WARDEN, B.L. v.d.
1956 Erwachende Wissenschaft, Basel 1956

WECKESSER,
1970 "Die Einführung von Brüchen mit Hilfe von Modellen", Mathematikunterricht 16, Heft 2, 1970: 30-77

WEINERT, F.E.
1974 "Kognitives Lernen: Begriffsbildung und Problemlösen", in: WEINERT u.a. (Hg.), 1974: 659-683

WEINERT, F.E./GRAUMANN, C.F./HECKHAUSEN, H./HOFER, M. (Hg.)
1974 Pädagogische Psychologie 2, Frankfurt 1974

WEYL, H.
1966 Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, Darmstadt 1966 (Original in: BAEUMLER,A./SCHRÖTER, M. (Hg.) Handbuch der Philosophie, München 1928)

WHITNEY, H.
1968 "The mathematics of physical quantities, Part I: Mathematical models for measurement", Am. Math. Monthly 75/2, 1968: 115-138

WILSON, J.W.
1971 "Evaluation of learning in Secondary School mathematics", in: BLOOM/HASTINGS/MADAUS, 1971: 643-696

WINTER, H.
1969 "Mengentheoretische Grundlagen der Relation der Verhältnisgleichheit", in: SCHMITZ/BÄR/WINTER, 1969: 53-101

WINTER, H.
1972 "Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule", in: Beiträge zum Lernzielproblem, Ratingen 1972: 67-95

WINTER, H.
1974 "Bemerkungen zur Einführung der reellen Zahlen", Der Mathematikunterricht 20, Heft 6, 1974: 7-38

WINTER, H.
1976 "Strukturorientierte Bruchrechnung", in: Beiträge zur Mathematikdidaktik, Festschrift für Wilhelm Oehl, Hannover 1976: 131-165

WINTER, H./ZIEGLER, T. (Hg.)
1969 ff Neue Mathematik Bd. 2-10, Hannover 1969 ff

WINTER, H./ZIEGLER, T. (Hg.)
1976 Neue Mathematik Bd. 6 Ausgabe 1976, Hannover 1976

WITTMANN, E.
1973 "The concept of grouping in Jean Piaget's psychology: formalization and applications", Educ. Stud. Math. 5, 1973: 125-146

WITTMANN, E.
1974 Grundfragen des Mathematikunterrichts, Braunschweig 1974

WOHLWILL, J.F.
1968 "A study of the development of number concept by scalogram analysis", in: SIGEL/HOOPER (Hg.), 1968: 75-104

YOST, P.A./SIEGEL, A.E./ ANDREWS, J.McM.
1962 "Nonverbal probability judgments by young children", Child Devel. 33, 1962: 769-780

JÜRGEN FLOER

Lebenslauf

28. 7.1939	geboren in Berlin als Sohn des kaufmännischen Angestellten Werner Floer und seiner Frau Gertrud, geb. Brormann
1945 - 1952	Besuch verschiedener Volksschulen
1952 - 1958	Besuch der Aufbaugymnasien in Unna und Recklinghausen
1958	Reifeprüfung am Staatlichen Aufbaugymnasium Recklinghausen
1958 - 1964	Studium Mathematik, Physik, Pädagogik, Philosophie an der Universität Münster
1961	Philosophisch-pädagogische Vorprüfung
1964	1. Staatsprüfung für das Lehramt am Gymnasium in Mathematik und Physik
1964 - 1966	Referendardienst an Gymnasien in Wanne-Eickel und Bochum
1966	2. Staatsprüfung für das Lehramt am Gymnasium
1966 - 1970	Tätigkeit als Studienassessor/Studienrat am Gymnasium in Schmallenberg
1968 - 1971	6 Semester Zusatzstudium in Pädagogischer Psychologie an der Ruhr-Universität Bochum
1970 - 1972	Wissenschaftlicher Assistent (als abgeordneter Studienrat) am Seminar für Didaktik der Mathematik der Abteilung Dortmund der Pädagogischen Hochschule Ruhr
1972	Ernennung zum Akademischen Oberrat

Seit 1966 bin ich mit Susanne Floer, geb. Bringmann, verheiratet. Unsere beiden Töchter wurden 1967 (Angela) und 1972 (Annette) geboren.

Dissertationsdruck
GmbH & Co. KG.
86 Bamberg · Hohe-Kreuz-Str. 9b · Tel. 0951/ 5 44 14

M. SCHADEL